

# Frattali ed altro ...

Di Loris Mannucci

Con quest'articolo mi propongo di fare un'introduzione ai frattali e di dare una rappresentazione di come essi rappresentino un valido strumento per la descrizione della natura. Il percorso segue le tappe di un normale curricolo scolastico che ha stimolato la curiosità e indotto riflessioni su questo argomento. Nello studio di modelli matematici della realtà tramite con le successioni si presentano quasi all'improvviso situazioni caotiche pur derivando da leggi deterministiche talvolta anche molto semplici. Nell'affrontare quest'argomento voglio attenermi, si parva licet componere magnis<sup>1</sup>, alla convinzione di Feynmann, per cui nessuna esposizione non matematica "potrà mai far capire la natura a 'quelli' dell'altra cultura". Quindi chiedo fin d'ora scusa a tutti se non riuscirò a perseguire questo difficile obiettivo, spero però che possa almeno stimolare un po' di curiosità e d'interesse.

## INSIEMI FRATTALI

### 1) Modelli d'accrescimento

Il primo incontro, che abbiamo con la matematica, è quello di contare 1, 2, 3, 4, .. ossia conoscere i "numeri naturali"<sup>2</sup>. Riscopriamo le caratteristiche (proprietà) di questo "insieme"; la prima<sup>3</sup>: è possibile confrontare i suoi elementi e stabilire fra due diversi quale sia il minore e il maggiore. Questo ci permette di scoprire che vi è un numero, lo zero 0, che è il più piccolo di tutti. Procedendo nella nostra esplorazione: ogni elemento ha un immediato successivo ( il numero che viene subito dopo quello considerato: 0 ha come successivo immediato 1; 1 ha 2, 2 ha 3, , 10 ha 11, ) ed ogni numero (eccetto lo 0) è il successivo immediato di un altro ( 1 è il successivo immediato di 0, 2 di 1, 3 di 2). Inoltre partendo da 0 attraverso il passaggio all'elemento successivo immediato si può raggiungere ogni elemento di N con un numero finito di passaggi: 0, suc(0)=1, suc(1)= suc(suc(0))= 2, suc(2)=suc(suc(suc(0)))=3 .. suc(n)=suc(suc( suc(0)..))=n+1. E' come percorrere la nostra genealogia partendo da Adamo per arrivare di padre in padre fino al nostro, quindi a noi, poi a nostro figlio e a nostro nipote e via seguendo, anche se a differenza degli uomini i numeri naturali hanno un solo discendente. Naturalmente vale anche la relazione inversa preso un qualsiasi numero si può con il precedente immediato arrivare fino allo zero; da nostro nipote considerando la relazione 'figlio di' ripetutamente si giunge ad Adamo. Queste proprietà si trasmettono a tutti i naturali.

Allarghiamo il nostro orizzonte, a partire dall'insieme N possiamo introdurre in un dato insieme T un'applicazione di N in T, chiamata successione a valori in T, che ad ogni naturale associa un elemento di T. Ecco alcuni esempi: a 0 corrisponde 0,  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4$ ,  $3 \rightarrow 6$ , ..,  $n \rightarrow 2n$ , .. all' insieme N si associa l'insieme dei numeri pari P; un'altra:  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 5$ , ..,  $n \rightarrow 2n+1$ , all'insieme N si associa l'insieme dei numeri dispari D ... Studieremo alcuni esempi di successioni che permettono di descrivere lo studio dell'accrescimento di una popolazione biologica (persone, muffe, batteri o altro ancora) considerando diversi modelli di rappresentazione della realtà.

I modelli studiati prevedono che la popolazione abbia un numero iniziale di soggetti, che indicheremo con  $a_0$ , dove il "numerino" ai piedi (pedice) dell'elemento  $a$  rappresenta il numero d'ordine della successione. Ecco un esempio: se un allevatore inizia la sua attività con 5 coppie di conigli, la "popolazione iniziale" sarà uguale a 10, che, in questa notazione, è indicata con  $a_0 = 10$ .

#### Risorse illimitate

Nel primo modello di crescita l'aumento della popolazione è, in ogni periodo, proporzionale al numero di individui presenti all'inizio del ciclo. Indicheremo questo coefficiente di proporzionalità con  $k$ , che indica l'eccedenza dei nati sui morti.

Indicando con  $a_n$  il numero dei soggetti presenti all'inizio del periodo n, con  $a_{n+1}$  quello alla fine, possiamo esprimere questo come somma del valore iniziale  $a_n$  e dell'incremento  $ka_n$ , in formula:  $a_{n+1} = a_n + ka_n = (1+k)a_n$ .

Se  $a_0$  è il numero d'individui presenti al tempo iniziale, la popolazione dopo il primo ciclo è  $a_1 = a_0 + ka_0$ ; dopo il secondo  $a_2 = a_1 + ka_1 = a_0 + ka_0 + k(a_0 + ka_0) = (1+k)^2 a_0$  e via di seguito fino al passo n-esimo, che diviene  $a_n = (1+k)^n a_0$ .

<sup>1</sup> ([Virgilio, Georgiche](#), IV, 176).

<sup>2</sup> L'insieme dei numeri naturali N= **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...**

<sup>3</sup> L'ordine di elencazione è casuale introdotto per evidenziare le proprietà

Ponendo  $\lambda = 1+k$ , la successione diviene  $a_n = \lambda^n a_0$  e presenta tre diversi comportamenti secondo il valore di  $\lambda$

$0 < \lambda < 1$ ; decrescente, ossia la popolazione è destinata all'estinzione.

$\lambda = 1$ ; costante, la popolazione è stazionaria

$\lambda > 1$ ; crescente, la popolazione è destinata a crescere geometricamente (accrescimento geometrico)

Quando un solo individuo si suddivide in due simili che, a loro volta, sono in grado di riprodursi nello stesso modo si ha una crescita geometrica con  $\lambda = 2$ . Nell'ipotesi di risorse disponibili (cibo e spazio), è quella del batterio, *Escherichia Coli*, che si scinde in due dopo circa mezz'ora. Rappresentiamo la popolazione al passare del tempo:

Tempo in mezz'ore	0	1	2	3	4	..	10	11	..
Numero individui	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$	..	$1024=2^{10}$	$2048=2^{11}$	..

nella prima riga indichiamo il tempo trascorso, in mezz'ore; nella seconda la popolazione. La crescita avviene per potenze di 2, perché, a partire dal primo, si ottiene il successivo raddoppiando il termine precedente; così dopo 12 ore avremo  $2^{24}$  individui ossia  $2^{10}*2^{10}*2^4 = 1024*1024*16$ , più di 16 milioni d'individui (16.777.216 per l'esattezza).

Questo primo modello non può rappresentare tutta la realtà, perché non considera le risorse necessarie all'accrescimento, che in questo caso, sono considerate illimitate.

Se l'ambiente, dove vive questa popolazione, offre una quantità di cibo sufficiente per  $b$  individui, l'incremento periodico sarà proporzionale non alla popolazione presente, ma alla quantità di risorse rimaste disponibili. Nella notazione consueta questo modello assume la formula seguente:  $a_{n+1} = a_n + k(b - a_n)$

Infatti, la popolazione alla fine di ogni ciclo è uguale a quella iniziale  $a_n$  aumentata di  $k$  volte non della popolazione iniziale  $a_n$  (modello precedente) ma di quella che può vivere con le risorse rimaste disponibili  $(b - a_n)$ .

Questa successione al crescere di  $n$  (numero dei cicli) tende a raggiungere il valore "limite"  $b$ , la popolazione che può vivere con quelle risorse. Lo sviluppo delle ninfee in un laghetto è un esempio di questa crescita: il valore limite  $b$  è raggiunto quando le ninfee hanno occupato tutta la superficie del laghetto. Quando il loro numero è "uguale" al quoziente fra l'area della superficie del laghetto e quella delle singole ninfee, considerata uguale per tutte. Dal loro numero all'inizio dell'osservazione l'accrescimento sarà proporzionale non al numero iniziale ma alle risorse rimaste disponibili (nel nostro caso la superficie del laghetto rimasta libera) cioè  $(b - a_n)$ . Cerchiamo di esprimere anche in questo caso la formula generale. Posto  $x_n = b - a_n$ , le risorse rimaste disponibili, la formula diviene  $b - x_{n+1} = b - x_n + kx_n$ , che permette di trovare l'espressione del termine generale delle risorse disponibili  $x_{n+1} = (1 - k)x_n$  ossia  $x_n = x_0(1 - k)^n$  e quello generale della successione  $a_n = b - (b - a_0)(1 - k)^n$ .

Scegliendo la massima popolazione consentita  $b$ , come unità di misura, (milioni o miliardi d'individui, non il singolo individuo che è rappresentato dal reciproco di  $b$ ) la formula ricorsiva assume la forma:  $a_{n+1} = a_n + k(1 - a_n)$ .

È interessante confrontare i due modelli di crescita a parità di popolazione iniziale e di  $k$  tasso di crescita.

## 2) I numeri di Fibonacci<sup>4</sup>

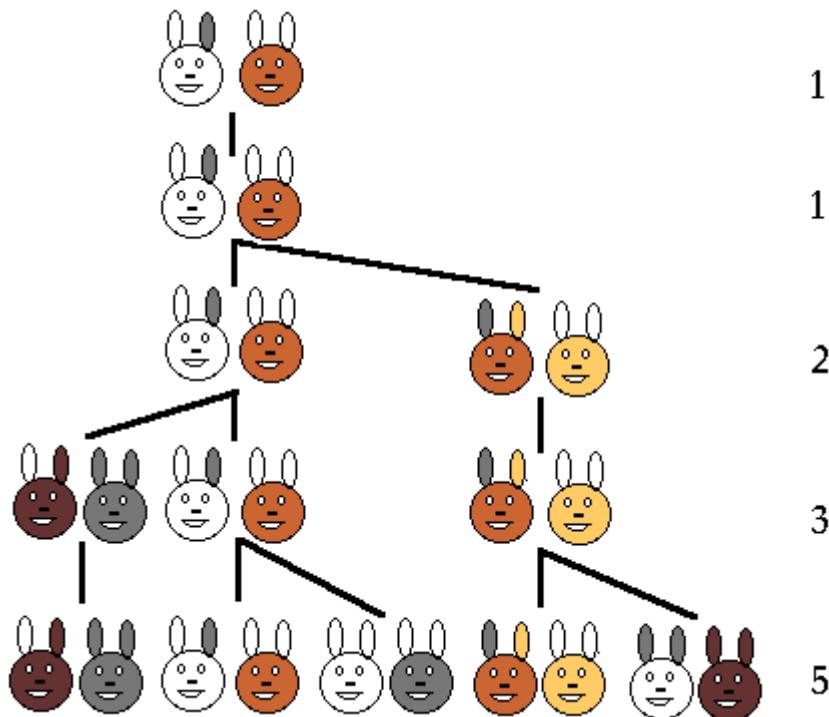
Nell'ipotesi di avere risorse illimitate, il modello di crescita illustrato nel paragrafo precedente non può descrivere situazioni dove occorre un certo tempo perché un individuo, appena nato, diventi 'adulto' e, quindi, possa a sua volta procreare. La crescita è così rallentata in attesa che alcuni individui diventino adulti. Il modello che proponiamo risolve questo bizzarro<sup>5</sup> e antico dilemma: quanti saranno alla fine dell'anno i conigli, nati da un'unica coppia appena nata, se nessuno muore e se ciascuna coppia genera, a partire dall'età di due mesi, ogni mese un'altra coppia?

Ecco una rappresentazione grafica: procedendo dall'alto in basso nell'albero genealogico della famiglia dei conigli il passaggio da una riga all'altra misura il tempo trascorso, in questo caso un mese. Inizio, tempo zero ( $t=0$ ): una coppia appena nata; un mese dopo,  $t=1$ : ancora una sola coppia di un mese; due mesi dopo,  $t=2$ , ancora una sola coppia che, però è divenuta fertile;  $t=3$ , tre mesi dopo, una coppia fertile e una coppia appena nata,  $t=4$ , quattro mesi dopo, una coppia fertile e una coppia appena nata,

<sup>4</sup> Leonardo Fibonacci, pisano, vissuto tra il 12° e il 13° secolo, con la sua famosa opera *Liber abbaci* diffuse in occidente idee e procedimenti dell'ambiente arabo e bizantino (tra cui, in particolare, la numerazione posizionale) Diede così un contributo fondamentale alla rinascita delle scienze esatte in Europa. La successione che porta il suo nome fu da lui introdotta per risolvere il problema illustrato nel paragrafo.

<sup>5</sup>Pur non essendo esperti d'allevamento di conigli, possiamo affermare che la situazione esposta non è certamente reale

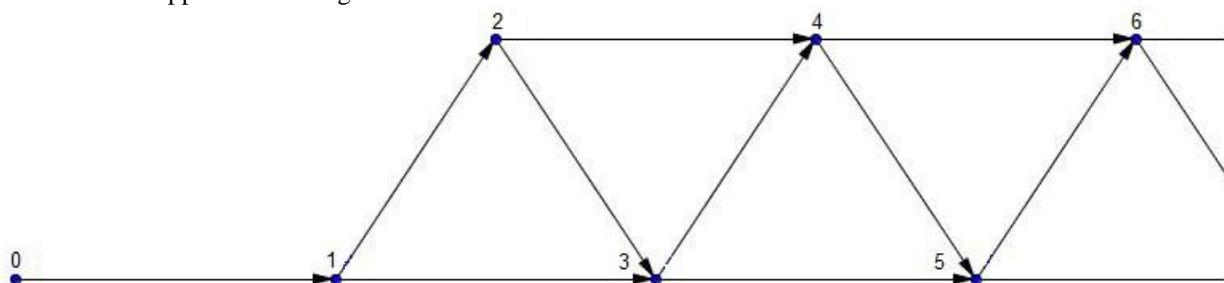
una coppia di un mese;  $t=5$ , cinque mesi dopo, due coppie fertili (coppia iniziale e coppia divenuta fertile) e due coppie appena nate (una della coppia iniziale l'altra della coppia divenuta fertile), una coppia di un mese.



Traduciamo questa situazione esprimendola in termini di una successione: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, .. che per coerenza potremo far partire da 0 (nessuna coppia di conigli) ed formalizzarla nei termini consueti:  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = 2$ ;  $a_4 = 3$ ;  $a_5 = 5$ ;  $a_6 = 8$ , ...,

Definiti i primi due  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  ricaviamo la regola che genera il successivo dai due che lo precedono  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  (F1). Così posto  $n=0$  si ha  $a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$ ;  $n=1$   $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ ;  $n=2$   $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ , ..

Questa successione risponde anche ad un altro problema: quanti sono i cammini che raggiungono un certo nodo in un sistema di strade a senso unico rappresentato dal grafo sottostante. Il senso unico va da sinistra a destra e con nodi in ordine crescente.



Partendo dal nodo 0 in quanti modi diversi si può raggiungerne un altro: nodo 1, un solo percorso attraverso i nodi 0-1; nodo 2, un solo percorso 0-1-2; nodo 3, 2 percorsi: 0-1-3; 0-1-2-3; nodo 4, 3 percorsi 0-1-2-4, 0-1-3-4, 0-1-2-3-4; e via dicendo ...

In analogia ai procedimenti precedenti vogliamo verificare se è possibile esprimere la successione di Fibonacci con un termine generale, che permetta di conoscere un termine qualsiasi. Di seguito forniamo la traccia e il parziale sviluppo del calcolo che porta al termine generale. Per la comprensione di questo articolo questa dimostrazione può essere saltata e la lettura ripresa ai commenti della formula generale.

Cominciamo col chiederci se può esistere una successione di potenze che soddisfi alla relazione (F1): poniamo dunque  $a_n = x^n$  e sostituiamo i termini  $a_n$  in (F1) ottenendo:  $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$  che dividiamo membro a membro per  $x^n$  ottenendo l'equazione di secondo grado  $x^2 - x - 1 = 0$ , le cui soluzioni hanno per somma 1 e per prodotto -1, ossia sono l'una l'antireciproca dell'altra.

Queste sono:  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Dunque, sono due successioni di potenze  $\alpha^n$  e  $\beta^n$ , che soddisfano la (F1);

tuttavia nessuna delle due soddisfa le condizioni iniziali: infatti è  $\alpha^0 = 1$ ,  $\beta^0 = 1$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ . Sembra a questo punto di non poter raggiungere il nostro obiettivo, ma abbiamo veramente trovato tutte le successioni che soddisfano la relazione (F1)? Partiamo da due importanti considerazioni:

I) se  $a_n$  è una successione che soddisfa la (F1) e se A è una costante, anche la successione  $Aa_n$  soddisfa la (F1). Infatti, dalla relazione  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  moltiplicando membro a membro per A si ottiene  $Aa_{n+2} = Aa_{n+1} + Aa_n$

II) Se  $a_n$  e  $b_n$  sono due successioni che soddisfano la (F1) e se A e B sono costanti, anche le successioni  $Aa_{n+2} = Aa_{n+1} + Aa_n$  e, analogamente  $Bb_{n+2} = Bb_{n+1} + Bb_n$  sommate membro a membro soddisfano la (F1):

$Aa_{n+2} + Bb_{n+2} = (Aa_{n+1} + Bb_{n+1}) + (Aa_n + Bb_n)$  e questa relazione non è altro che la (F1) scritta per la successione  $A\alpha^n + B\beta^n$ . Possiamo allora esser certi che tutte le soluzioni tipo  $A\alpha^n + B\beta^n$  (F2) soddisfano la (F1). Resta da determinare le costanti A e B in modo da soddisfare le condizioni iniziali. Assegnando agli esponenti i valori n=0 e n=1, otteniamo le seguenti condizioni

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \alpha A + \beta B = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare in due equazioni e due incognite (A e B), con determinante uguale a  $\beta - \alpha$ , quindi diverso da zero. Esso ha come soluzione:  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ . Con questi valori di A e di B, la successione (F2) coincide con quella di

Fibonacci e si ha

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (\text{F2})$$

Notiamo che si ha  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ , mentre  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$  è negativo ed ha valore assoluto minore di 1. Il secondo termine della (F2) è in ogni caso inferiore ad  $\frac{1}{2}$  in valore assoluto, e diventa rapidamente molto piccolo. Perciò l'n-simo

numero di Fibonacci è dato dall'intero che è più vicino al numero  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ .

### 3) Accrescimento logistico

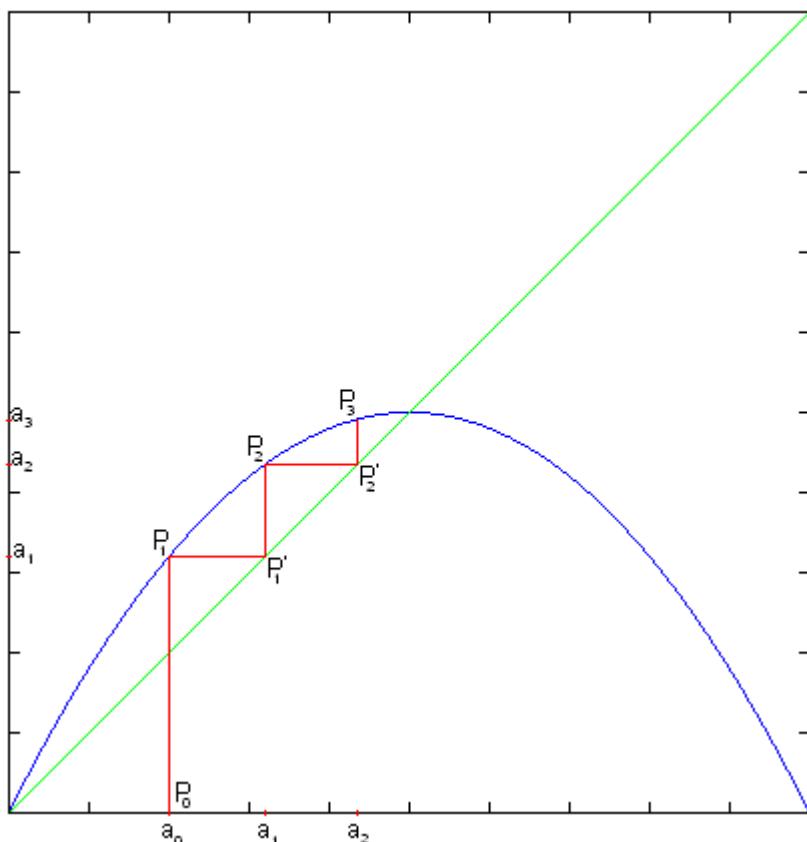
Introduciamo un nuovo modello, che incorpora le caratteristiche dei primi due descritti al punto 1), in cui l'accrescimento è proporzionale alla popolazione presente all'inizio del nuovo ciclo, ma il fattore di crescita non è fisso  $(1+k)$ , come nel primo, ma proporzionale alle risorse rimaste disponibili  $(b - a_n)$  come nel secondo; in formule:  $a_{n+1} = \lambda(1 - a_n)a_n$ . Il fattore  $(1 - a_n)$  (che riassume in sé ciò che può frenare o regolare la crescita della popolazione come mancanza di cibo, condizioni climatiche meno favorevoli,... è chiamato fattore di retroazione.) rappresenta le risorse non ancora sfruttate dove, come di consueto, il valore 1 esprime la popolazione limite in una particolare unità di misura, mentre  $\lambda$  rappresenta il coefficiente di crescita. Questa formula non è lineare come le precedenti, ma l'accrescimento viene a dipendere anche dal quadrato del termine precedente  $a_{n+1} = \lambda(1 - a_n)a_n = \lambda a_n - \lambda a_n^2$  (F3).

In termini strettamente matematici questo è un esempio d'equazione alle differenze finite non lineare, relativa al cosiddetto "accrescimento logistico" di una popolazione. Dal momento che una successione è una particolare funzione possiamo scrivere la formula, che calcola il termine successivo a partire dal precedente, nella notazione consueta delle funzioni.

Procediamo nella trasformazione:  $a_{n+1}$  è il termine successivo  $a_n$ , che, nella notazione delle funzioni, è l'immagine di  $a_n$  cioè  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Esprimendo la funzione  $f$  con la consueta notazione  $a_n \rightarrow x$ ,  $a_{n+1} \rightarrow f(x)$ , si ottiene dalla (F3):  $f(x) = \lambda(1 - x)x$ , che ha come grafico nel piano cartesiano la parabola  $y = \lambda(1 - x)x$ . La sua rappresentazione grafica,

$\Phi$ , interseca l'asse delle ascisse in 0 ed in 1 ed ha il vertice di coordinate  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = \frac{\lambda}{4}$ ,  $V\left(\frac{1}{2}; \frac{\lambda}{4}\right)$ . Dunque scelto un

valore  $\lambda$ , rappresentiamo  $\Phi$ , grafico della parabola  $y = f(x)$ , che ad ogni valore dell'ascissa  $x$  associa l'ordinata  $f(x)$ ; nel linguaggio delle successioni, dato il termine  $a_n$  (ascissa) otteniamo il successivo  $a_{n+1}$  (ordinata). Dal valore iniziale della successione  $a_0$ , rappresentato sull'asse delle ascisse con il punto  $P_0(a_0; 0)$  si ottiene il successivo  $a_1$ ,  $a_1 = f(a_0)$ , che è l'ordinata del punto  $P_1(a_0; f(a_0))$  di  $\Phi$ . Il segmento  $P_0P_1$ , parallelo all'asse delle  $y$ , rappresenta il passaggio da  $a_0$  ad  $a_1$ , dove il primo termine è l'ascissa del primo estremo  $P_0$ , il secondo l'ordinata del secondo estremo  $P_1$ . Per trovare  $a_2$  dovremmo riportare il termine  $a_1$  sull'asse delle ascisse e tracciare la parallela all'asse delle ordinate fino ad intersecare  $\Phi$ , in  $P_2(a_1; f(a_1))$ , ottenendo così il valore  $a_2 = f(a_1)$ . Possiamo risolvere graficamente questo calcolo, usando, nel piano cartesiano, la bisettrice del I quadrante, e tracciare dal punto  $P_1(a_0; f(a_0))$ , un segmento, sulla parallela all'asse delle ascisse, fino ad incontrare la bisettrice in un punto  $P_1'(f(a_0); f(a_0))$ , o equivalente  $P_1'(a_1; a_1)$ , da questo un altro segmento, sulla parallela all'asse delle ordinate, fino ad incontrare la parabola in  $P_2(a_1; f(a_1))$  e così via per gli altri punti.

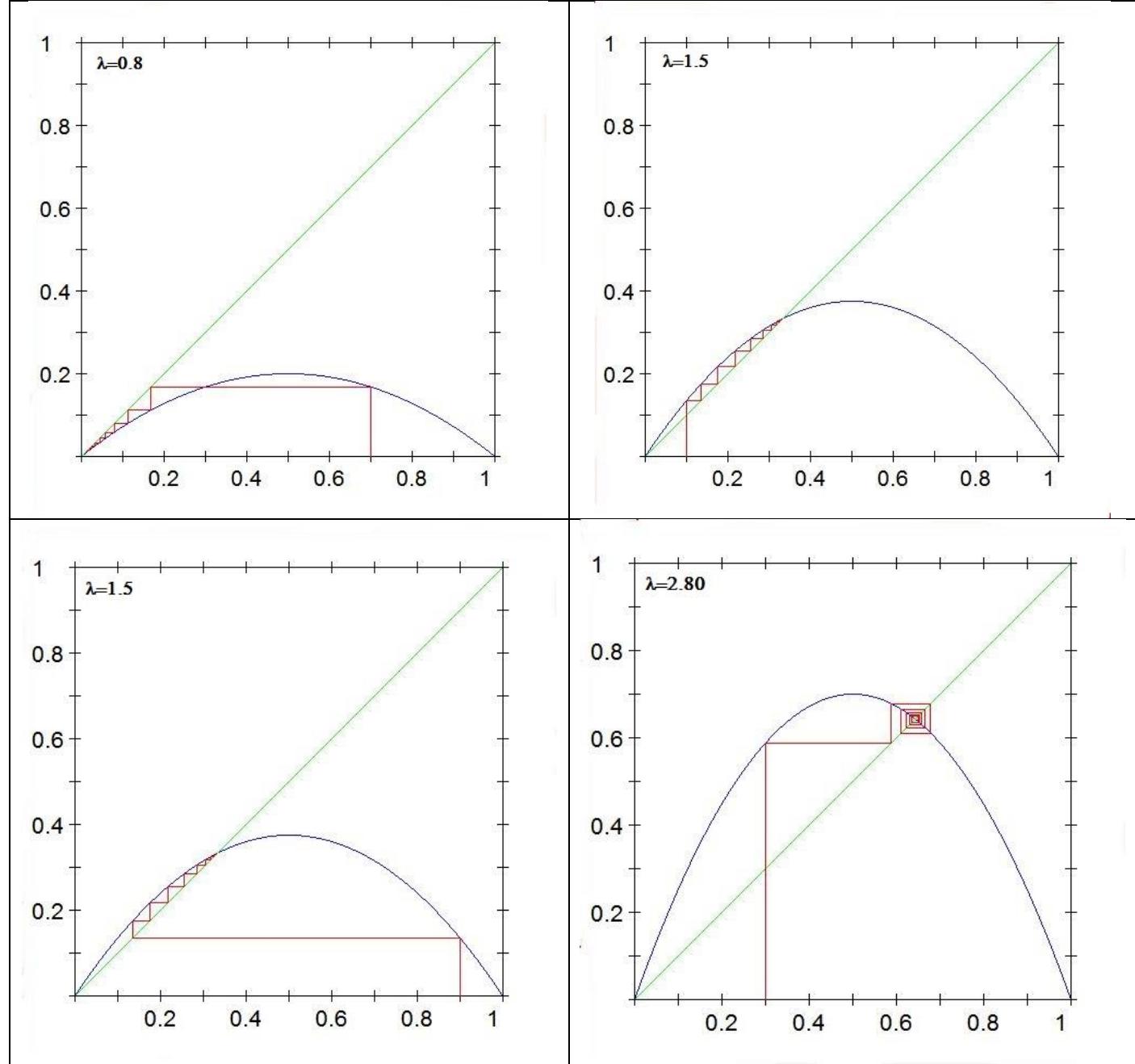


Quindi a partire dal primo termine si genera una spezzata che fornisce una rappresentazione grafica della successione e permette di “vedere” il suo comportamento:  $P_0P_1P_1'P_2P_2'P_3\cdots P_{n-1}P_n$ .

Otteniamo diversi comportamenti secondo i valori di  $\lambda$ . Le ascisse dei punti d'incontro della parabola con la bisettrice si ottengono dalla soluzione dell'equazione  $\lambda(1-x)x = x$  e sono  $x = 0$  e  $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$ :

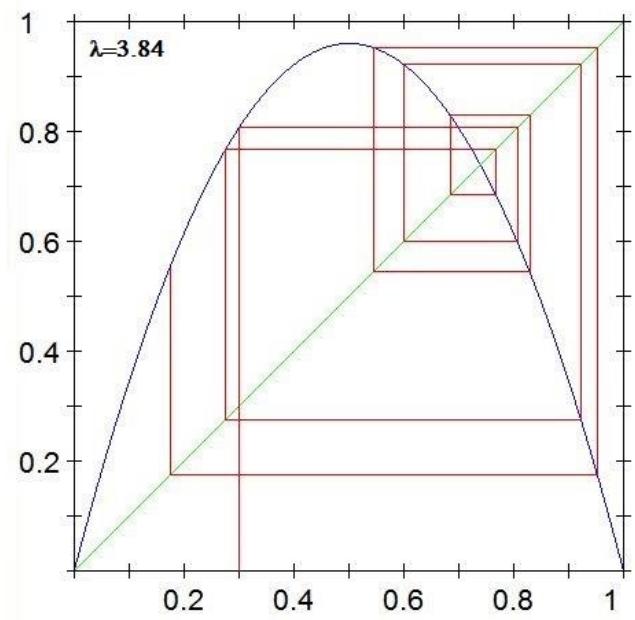
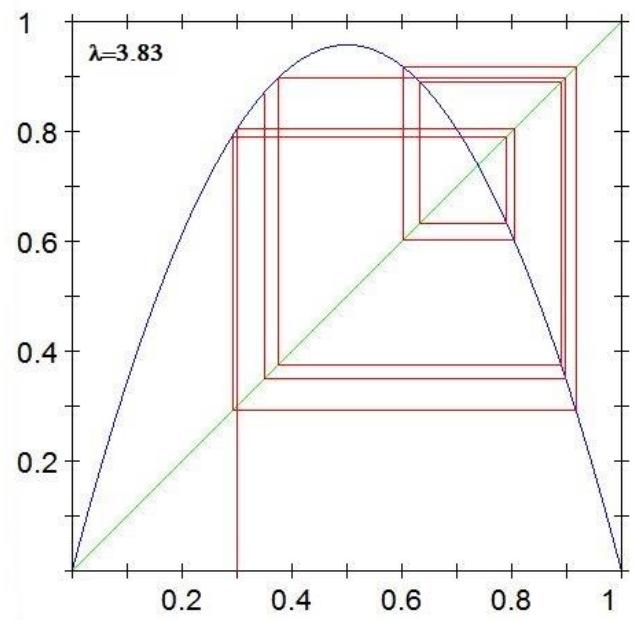
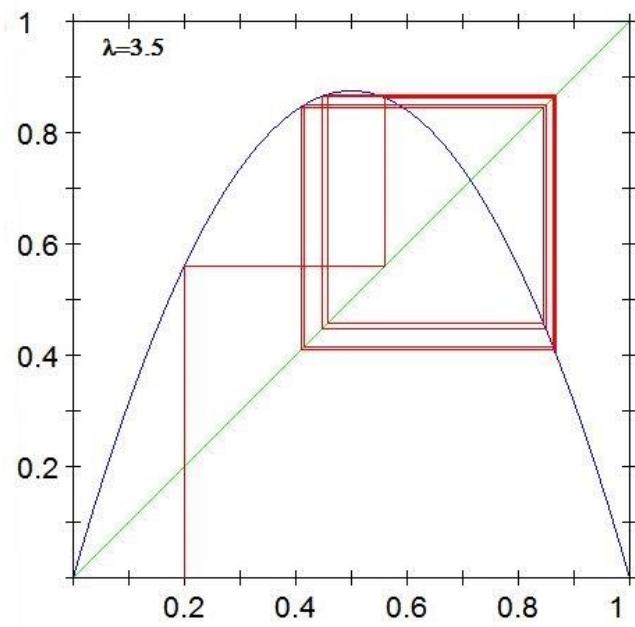
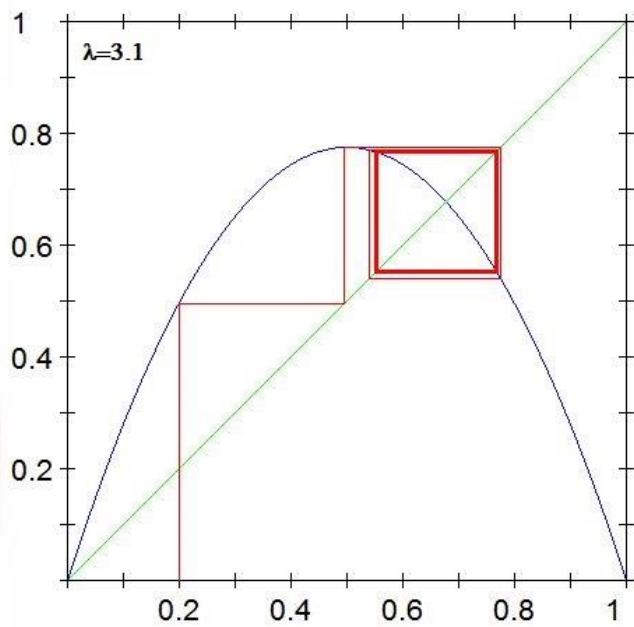
se  $0 < \lambda \leq 1$  non vi sono altri punti d'intersezione della parabola con la bisettrice diversi dall'origine, per cui l'origine è un punto ‘attrattivo’ della successione, che converge a 0 per qualunque valore iniziale nell'intervallo  $[0; 1]$ . Infatti Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola  $p = f'(x_0) = \lambda(1-2x_0)$  ( $p = 2ax_0 + b = -2\lambda x_0 + \lambda$ ) si mantiene nell'origine minore di 1, essendo  $p = f'(0) = \lambda$ . Questo ci assicura che  $|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| < k|a_n - a_{n-1}|$ , con  $0 < k < 1$  e

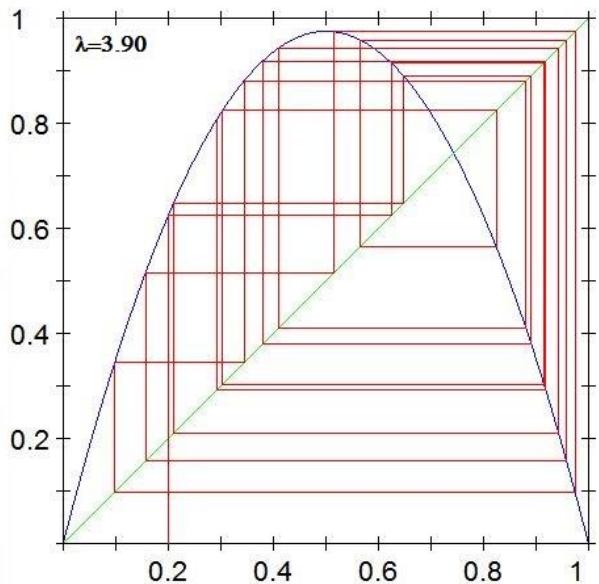
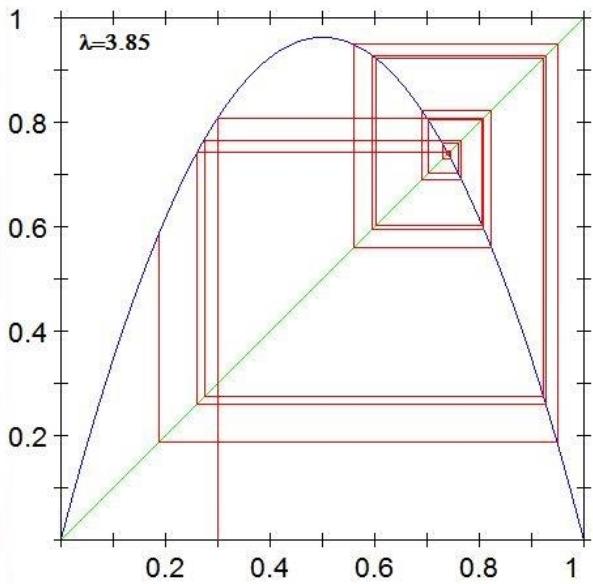
quindi la successione converge a zero. Vediamo per quali valori  $f\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda - 2\lambda * \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda$  è in modulo minore di 1,  $-1 < 2 - \lambda < 1$ , quindi per  $1 < \lambda < 3$  la successione convergerà a  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , ossia ad un unico valore.



Nel secondo grafico, dove  $\lambda > 1$ , la parabola interseca la bisettrice in due punti: l'origine O, che, come affermato sopra, è un punto repulsivo e l'altro, invece, attrattivo verso al quale la popolazione tende a stabilizzarsi. Aumentando il valore di  $\lambda$  (quarto grafico) l'intersezione con la bisettrice è in un punto, in cui la parabola è discendente, quindi è attrattivo perché la "pendenza" della retta tangente alla parabola in questo punto è, come sopra calcolato, in modulo minore di 1.

Quando questa "pendenza" diviene in modulo maggiore di 1 la successione continua ad assumere valori nell'intervallo  $[0,1]$ , poiché il massimo della parabola è minore di 1. Questo accade quando  $3 < \lambda < 4$  la successione non tende al consueto punto d'incontro, che diviene repulsivo, ma ha strani 'comportamenti' e il suo comportamento diviene difficilmente prevedibile. Nei grafici sottostanti diamo una rappresentazione grafica di alcuni comportamenti per le prime 10 iterazioni.





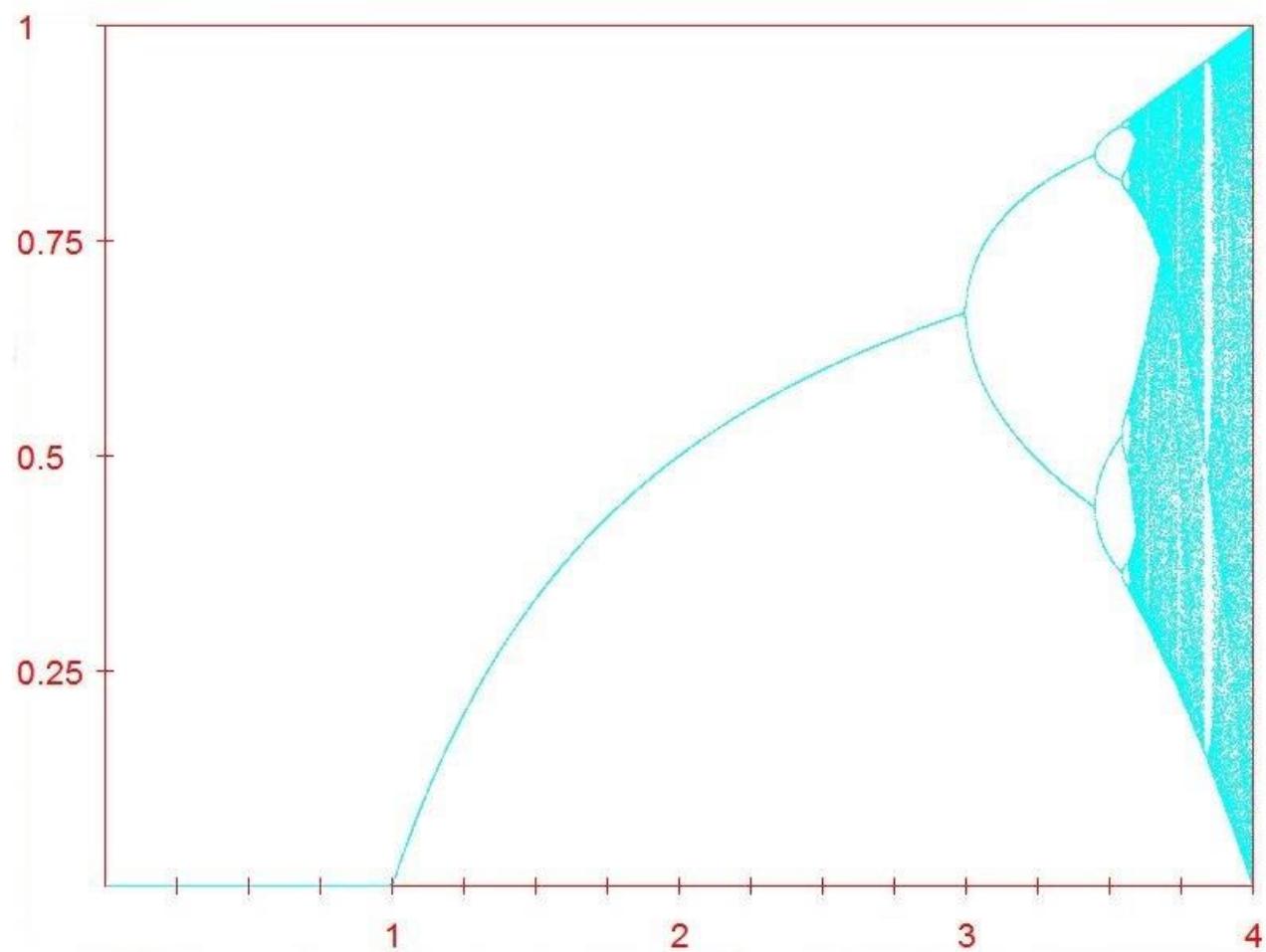
Analizziamone i grafici precedenti per i differenti valori di  $\lambda$  :

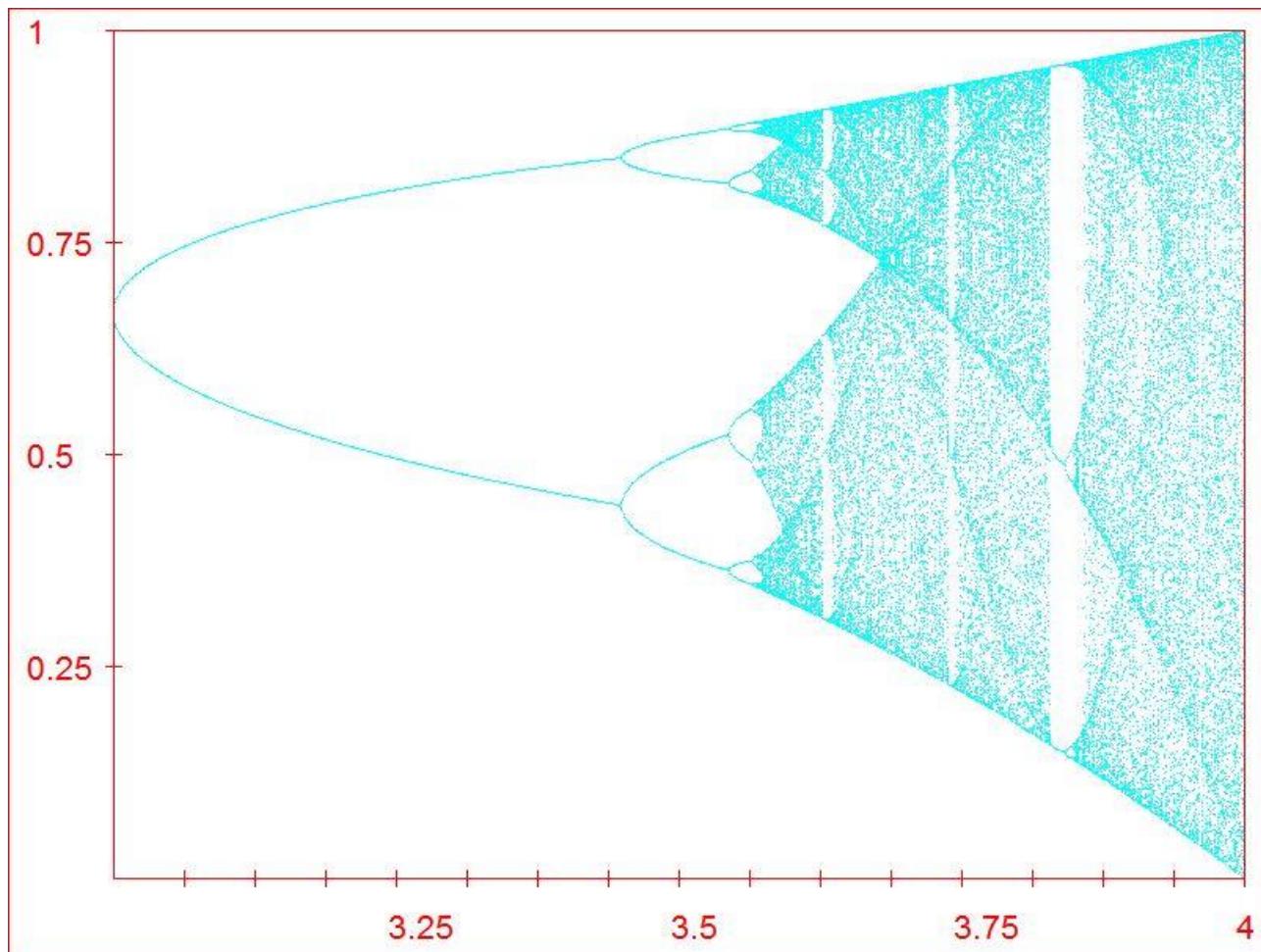
$\lambda = 3.1$  dopo poche iterazioni iniziali i termini della successione saltano tra 2 valori uno a sinistra e l'altro a destra del punto di incontro tra retta e parabola;

$\lambda = 3.5$  i termini saltano tra quattro differenti valori: 2 a sinistra e 2 a destra del punto d'incontro;

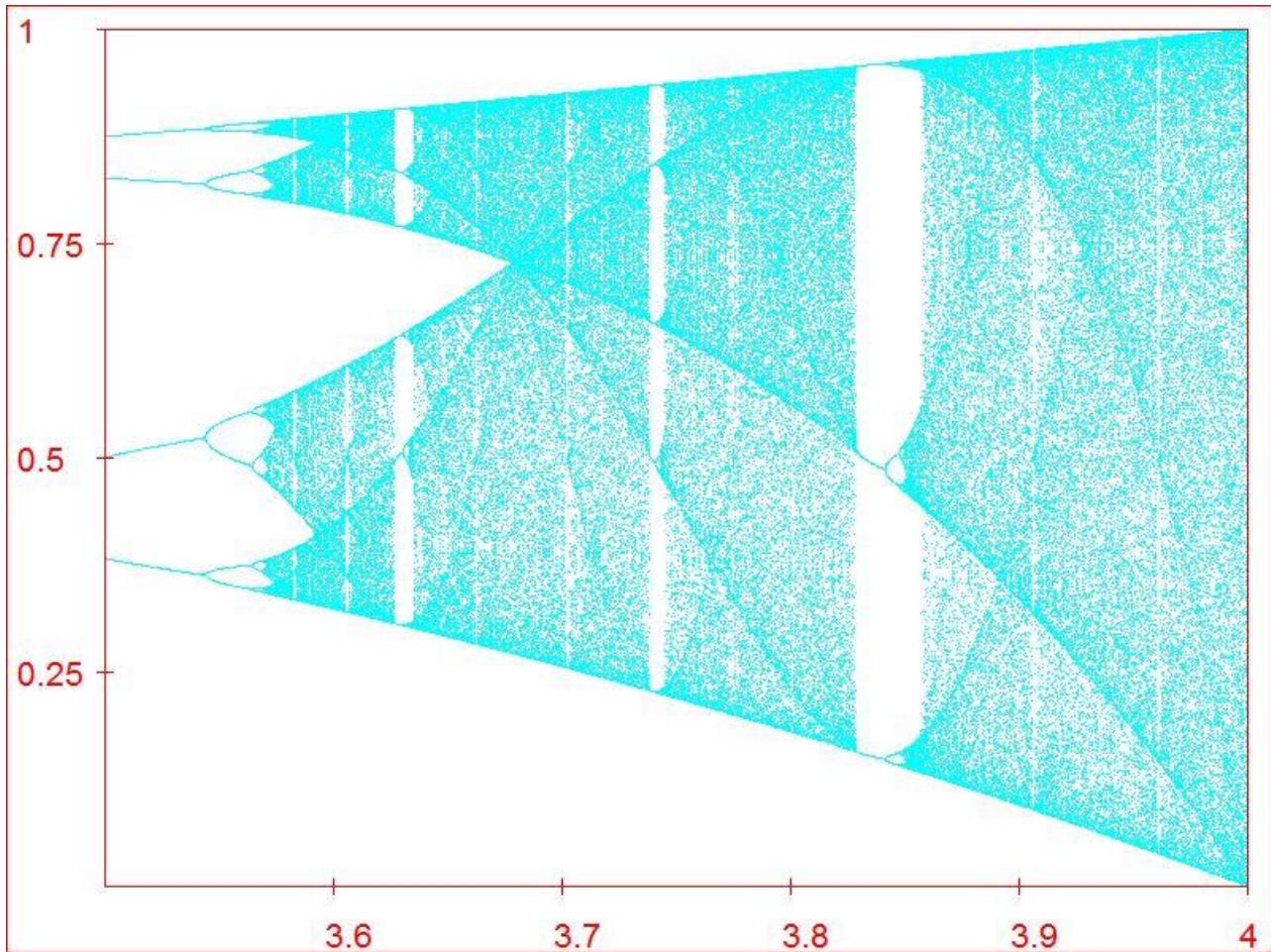
$\lambda = 3.83, 3.84, 3.85, 3.90$  i termini della successione "ballano" fra differenti valori che si "stabilizzano" dopo un certo numero di iterazioni come viene spiegato successivamente.

Possiamo riassumere tutti questi risultati con un grafico ottenuto con i valori "asintotici" della successione, posti in ordinata, corrispondenti al variare di  $\lambda$ , posto in ascissa. La rappresentazione grafica è ottenuta associando ad ogni  $\lambda$ , i valori assunti dalla successione dopo 400 iterazioni, quando essi sono stabilizzati su termini definiti, che subiscono variazioni minime nelle iterazioni successive e che non sono più separabili nella rappresentazione grafica adottata.

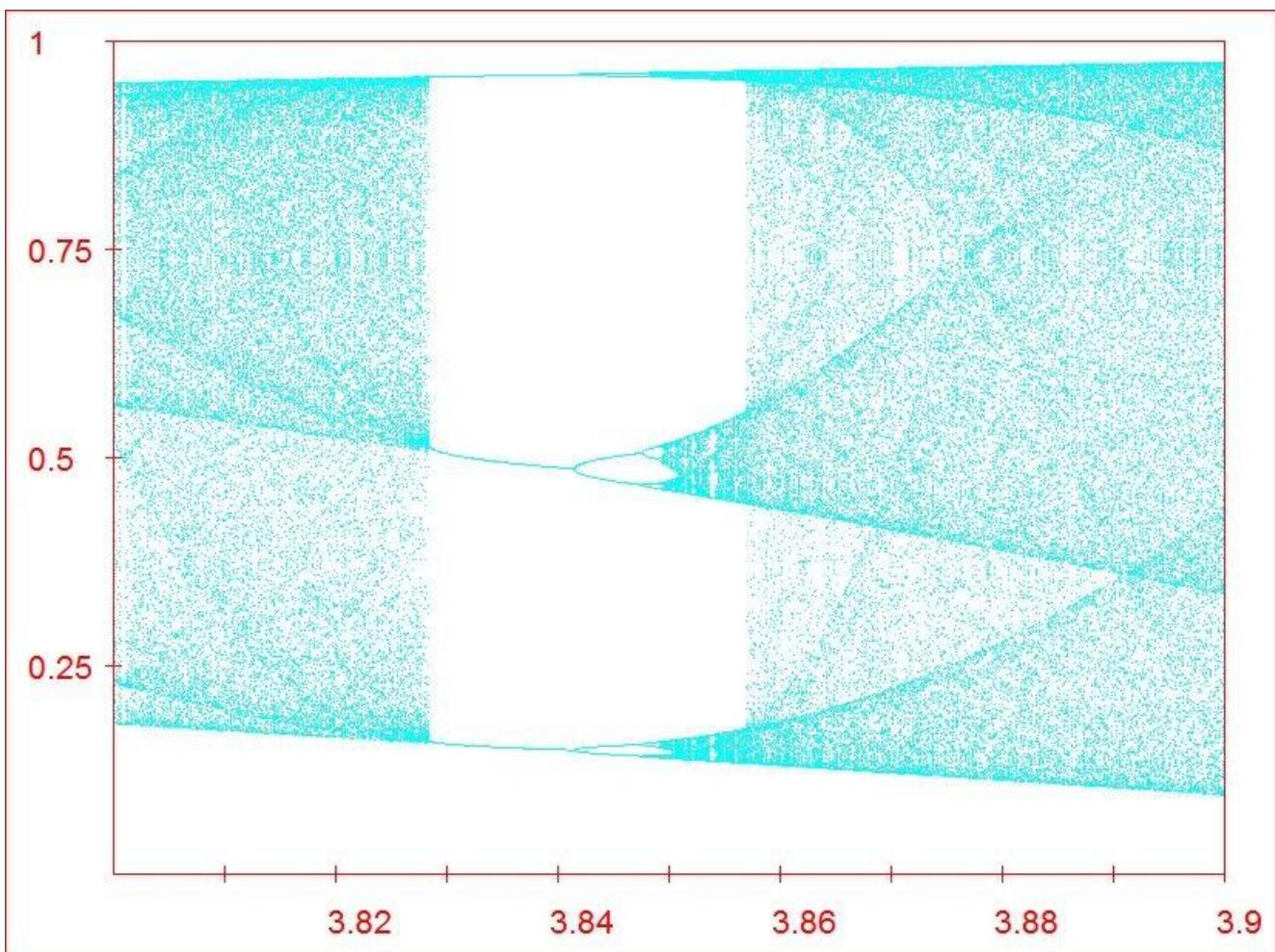




Questo è ingrandimento della figura precedente per i valori di  $\lambda$  tra 3 e 4. Possiamo notare come, dopo la biforcazione, la figura si sdoppia in due figure che si intersecano, dove ciascuna riproduce la figura complessiva ottenuta con una trasformazione costituita anche da un cambiamento di scala. Le figure definite a loro volta riproducono la figura complessiva ottenuta con un'altra trasformazione della stesso tipo e così continuando



Anche in questo ingrandimento possiamo individuare “localmente” figure della biforcazione, che riproducono la figura complessiva dopo una trasformazione composta anche di un cambiamento di scala. Anche in questo caso le figure individuate richiamano a loro volta la “forma” della figura complessiva.



Il grafico riassume in modo evidente il comportamento della successione al variare di  $\lambda$  :

$0 < \lambda \leq 1$  la successione converge a 0

$1 < \lambda < 3$  converge al valore  $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$  intersezione fra la parabola e la bisettrice

$3 \leq \lambda \leq 4$  la linea si biforca la successione oscilla fra due valori. Ciascuna delle linee così ottenute si biforcano di nuovo e la successione oscilla tra quattro valori, poi tra 8 e così via, per poi ricominciare da meno valori (zona più chiara) fino a successivamente aumentare nuovamente. Notiamo come la prima biforcazione e poi quelle successive presentino localmente figure che riproducono con cambiamento di scala quella intera e generino al proprio interno figure ridotte in scala della stessa. Questa proprietà detta auto similarità è propria dei frattali e sarà ben definita successivamente dopo la presentazione di altri esempi.

## Prossimi argomenti:

- Figure Strane**
- Chaos Game**
- Successioni in campo complesso**
- Sezione Aurea**
- Tassellatura Penrose**
- L-System**