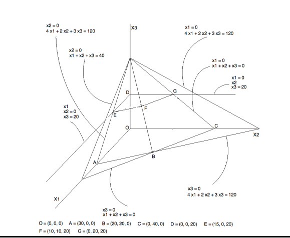
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Alberto Burato, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 184 – Pubblicato il 10 – 12 – 2013



MA PERCHÉ È COSÍ DIFFICILE INSEGNARE LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE?

di Antonino Drago [*]

È da molti anni che i programmi ministeriali hanno introdotto l'insegnamento delle geometrie non euclidee. Ma, a mia conoscenza, non si è creata alcuna tradizione tra gli insegnanti, né il mondo accademico si è sforzato di presentare questa didattica in termini facilmente praticabili nelle scuole secondarie. Perché? Nel seguito cercherò di rispondere andando a fondo della questione. Per sinteticità mi esprimerò per rapidi punti.

1° Innanzitutto, notiamo un equivoco: fino al 1800 nessun geometra si fidava di trattare i punti all'infinito; tutti i geometri intendevano per retta un segmento sempre più estensibile, non una figura con i suoi punti estremi. Fu poi la geometria proiettiva (oltre che l'analisi infinitesimale) che rese familiari quei punti ai matematici.

2° Fu Playfair (1793) a proporre l'assioma delle parallele nella forma attuale: "… esiste una ed una sola retta parallela alla data": una dizione che presuppone che noi conosciamo la retta intera, compresi i suoi punti estremi. Invece Euclide, come tutti i Greci antichi, voleva attenersi al finito e all'operativo di riga e compasso, perciò non ha mai scritto così; ma: se l'angolo d'incidenza di una trasversale alla perpendicolare alla retta data è minore di un retto, essa incontra questa retta; cioè la parallela è quella che *non* incontra la retta data perché *non* ha l'angolo minore di un retto. Questa proposizione non è un'affermazione su una possibilità reale; è un'illazione che decide sugli sconosciuti punti all'infinito. Il confronto tra le proposizioni di Euclide e di Playfair fa capire che la seconda è idealistica e che quindi tutta la geometria euclidea, che usa in maniera essenziale una proposizione idealistica, è essenzialmente idealistica. Essa risulta tale anche dal confronto, che si è potuto fare un secolo dopo, con le altre geometrie non euclidee: il raggio di curvatura del suo spazio è un estremo: infinito. Invece, la si presenta sempre secondo la tradizione che le attribuiva il massimo di operatività e costruibilità in matematica (tradizione nata perché i Greci, usando solo riga e compasso e le sole proporzioni, credettero di scampare al pericolo di incontrare i numeri irrazionali; ma scampati da Scilla della incommensurabilità, sono caduti in Cariddi della parallela essenzialmente idealistica).

3° Le famose figure introduttive di Saccheri e di Lobacevskij sono sbagliate di concetto: il piano euclideo non può coincidere con alcuna superficie non euclidea (si pensi alla superficie sferica, quale rappresentazione della geometria ellittica). Ognuna di quelle figure al più può rappresentare la zona infinitesima del piano tangente euclideo attorno ad un punto per cui passino i segmenti della parallela euclidea e di quelle non euclidee; ma appena si prolungassero questi vari segmenti infinitesimi in una regione finita, essi divergerebbero, oltre che sul piano euclideo, nello spazio; ad es. nella Fig. 1 la curvatura dello spazio ellittico costringe il segmento infinitesimo ellittico, se prolungato, a uscire al di sotto del piano euclideo, mentre quello dello spazio iperbolico al di sopra. D'altronde, la figura è sbagliata all'origine: pone una retta base che, per come è data, non può che essere euclidea; ma non c'è una retta euclidea che coincida con quelle non euclidee. Quindi ambedue quelle figure ostacolano la comprensione delle geometrie non euclidee sin dall'inizio; esse sono delle trappole per la intuizione. Potevano essere giustificate nei primi scopritori, che dovettero arrampicarsi sugli specchi per intuire quella che era una novità assoluta; ma oggi sono devianti, così tanto che anche l'insegnante che volesse introdurre queste geometrie sulla base della storia dovrebbe spiegare agli studenti che quelle figure debbono essere viste opportunamente, secondo raggi di curvatura finiti; ma questa spiegazione toglierebbe tutto l'aiuto che di solito dà una figura all'intuizione (così come se volesse semplificare l'insegnamento dell'analisi infinitesimale introducendo i vecchi infinitesimi di Leibniz, dovrebbe insegnarli con concetti matematici solo in termini finiti; ma ciò ridurrebbe molto il potere immaginifico di quel concetto).

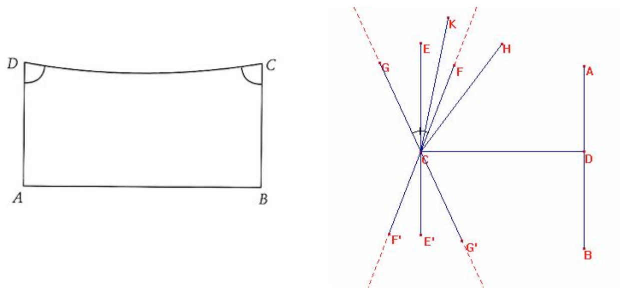


Figura 1

4° Saccheri voleva liberare da ogni "neo" la geometria euclidea dando la dimostrazione della verità dell'assioma delle parallele. Secoli di fallimenti di analoghi tentativi dimostrano (come nel caso del moto perpetuo) che è impossibile decidere la verità dell'assioma delle parallele (che, di fatto, riguarda i punti all'infinito) con i soli mezzi della geometria euclidea (riga e compasso). Questa esperienza negativa, di fatto, anticipò il teorema di Gödel. Lobacevskij e Bolyai passarono dal problema di decidere la verità di questo assioma ad affermare che esso è indipendente dai precedenti (per dirla secondo un atteggiamento assiomatico); e quindi cercarono altre geometrie, del tutto diverse.

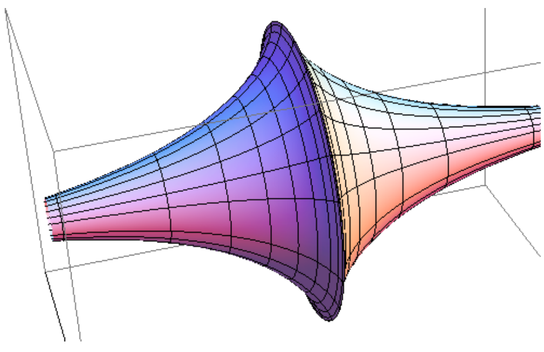


Fig. 2. Superficie di Beltrami a curvatura costante negativa

5° Beltrami sconvolse le convinzioni radicate sulla vaghezza e inutilità della geometria iperbolica trovandone un modello nello spazio usuale (Fig. 2): la superficie di rotazione della trattrice.[1] Ma il modello valeva solo localmente (all'inizio esso ha una cuspide); inutilmente egli cercò di estendere il modello ad uno che valesse globalmente; Hilbert dimostrò che non era possibile. Si danno vari modelli anche per le geometrie ellittiche; il più usuale è un ellissoide. Ma Lindemann dimostrò che sono tutti locali.[2] Quindi anche le maniere visive più usuali di presentare le geometrie non euclidee sono devianti, senza che di solito lo si faccia notare; l'intuizione viene diretta su oggetti geometrici parziali, che non fanno vedere tutta la realtà delle nuove geometrie.

6° Alla scoperta delle nuove geometrie, rispose con entusiasmo G. Battaglini, che creò una rivista apposita ("Il giornale di Battaglini"). Lì, presentò una via rapida e didattica per introdurre la geometria iperbolica.[3] Trovò che in un triangolo con un lato prolungato all'infinito c'è proporzionalità tra seno e seno iperbolico, e tra tangente e tangente iperbolica. Ma Enriques dimostrò che la deduzione di Battaglini era sbagliata, perché le relazioni tra i due tipi di funzione valgono nello spazio, non sul piano.[4] In conclusione, sul piano euclideo non esistono maniere rigorose di introdurre le geometrie non euclidee, neanche con funzioni speciali (Fig. 3).

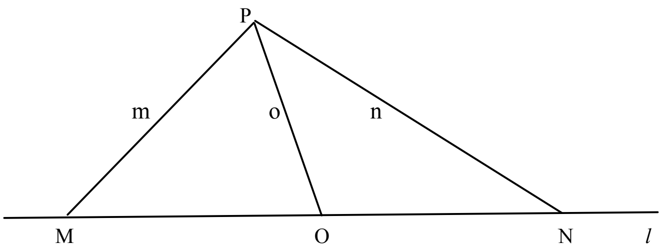


Fig. 3. Per M e N $\rightarrow \infty$, $\sinh \mathrm{MO} / \sinh \mathrm{NO} = k \sin mo / \sin no$, ma non $\cosh \mathrm{MO} / \cosh \mathrm{NO} = h \cos mo / \cos no$.

7° Le geometrie non euclidee sono state scoperte (non quando si sono studiate le superfici a raggio di curvatura finito, come molti credono, ma) quando per la prima volta si è pensato lo spazio euclideo al di fuori di esso; ciò avvenne dopo che la trigonometria divenne una teoria.[5] In effetti le formule di trigonometria sferica cambiano con regolarità nelle varie geometrie, sulla base di due parametri: il raggio di curvatura, finito o infinito; e l'argomento reale o immaginario. Proprio questa traducibilità delle formule nei casi euclideo ed iperbolico, diede a Lobacevskij la convinzione di essere nel giusto. Una didattica scolastica della trigonometria sferica darebbe un fondamento formalmente corretto e sicuro allo studio delle geometrie non euclidee; ma purtroppo sembra poco proponibile per la complessità delle sue formule.

8° La metrica di ogni geometria è diversa e in genere complicata. Inoltre come selezionare tra le infinite metriche quelle più interessanti? (Per di più quella di Minkowski, presentando un segno meno, è degenere; per tal motivo non viene di solito considerata dagli studi generali sulle geometrie non euclidee).

9° Alla fine del secolo XIX sono sopraggiunte le interpretazioni date dalle geometrie proiettiva ed affine; ma esse coinvolgono a priori i punti all'infinito, trattati come infinito in atto. Sono quindi visioni metageometriche idealistiche, che ad es. non possono rappresentare l'aspetto operativo della Matematica.

10° Ulteriormente (1872), il programma di Erlangen ha proposto di caratterizzare le geometrie mediante i gruppi di trasformazione. Ma, in Klein, è rimasto solo un programma. Proseguito da altri, si è allargato ad usare anche i gruppi topologici. Alla fine la caratterizzazione ha dato un'ottantina di geometrie, dove è difficile riconoscere quelle più semplici e più intuitive.[6] Giustamente il Bourbaki afferma che (così) "la geometria è svanita".[7]

11° Poincaré ha trovato, con tre metodi diversi, che le più importanti geometrie sono quattro: la geometria euclidea, la ellittica, la iperbolica e quella che poi sarà la geometria di Minkowski; e non tre come aveva creduto di dimostrare Helmholtz, che imponeva l'assioma del libero movimento dei corpi rigidi (mentre invece la termodinamica non usa tali corpi).[8] Il metodo più semplice di Poincaré è quello di studiare le quadriche, studio che è abbordabile nella scuola. Si ottengono per le geometrie non euclidee: un ellissoide, un iperboloide a due falde e per l'ultima un iperboloide a una falda (che, come caso estremo, è la figura del cono-luce della relatività ristretta) (Fig. 4).

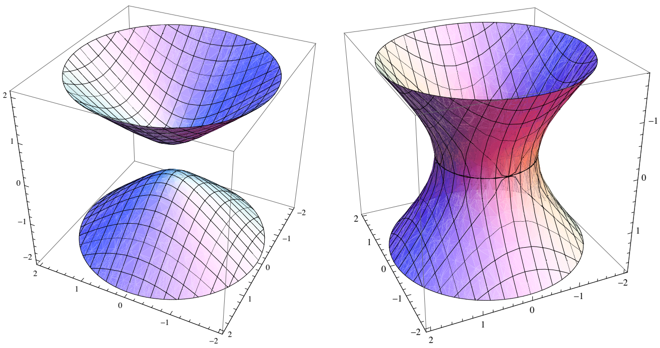


Fig. 4. Iperboloidi a due falde e a una falda

12° Nel 1899 Hilbert ha formalizzato in maniera assiomatica la geometria euclidea e poi anche le altre geometrie: ogni geometria è semplicemente un sistema di assiomi. Certamente questa è la maniera più semplice di affrontare le loro diversità: cambiare qualche proposizione dell'assiomatica. Ma ogni insegnante sa che la ventina di assiomi di Hilbert per la familiare geometria euclidea sono indigeribili anche agli studenti più dotati. Inoltre il tentativo di assiomatizzare ogni altra teoria matematica ha rivelato (teorema di Gödel del 1931) che l'assiomatica non è la sola maniera di considerare una teoria, è una maniera parziale (Beth, van Heijenoort, Hintikka). Quindi la scelta di insegnare un'assiomatica sarebbe non solo estremamente riduttiva della ricchezza e della intuitività delle geometrie, ma anche parzializzante.

[*Segue al numero* 185]

Riferimenti bibliografici:

[1] Si trovano notizie dettagliate sulle geometrie non euclidee e la loro storia nel libro di E. Agazzi e D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, La Scuola, Brescia, 1998. Però la sua impostazione, dichiarata sin dall'inizio, è quella formalista hilbertiana (ad es., a p. 159 il libro enuncia solennemente un "Assioma di Lobacevsky" senza dire che lui non l'ha mai scritto).

[2] E. Agazzi e D. Palladino, op. cit., pp. 271ss.

[3] G. Battaglini, "Sulla geometria immaginaria di Lobachevsky", *Giornale di Matematica*, 5 (1867).

[4] F. Enriques, *Conferenze sulle geometrie non-euclidee*, Zanichelli, Bologna, 1918.

[5] Lo ha illustrato J. Gray, "Non-Euclidean geometry - A re-interpretation", *Historia Mathematica*, 6 (3) (1979), 236-258. Però egli attribuisce all'analisi infinitesimale il ruolo di teoria fondante la trigonometria. Ma che la trigonometria possa essere fondata indipendentemente da questa analisi lo dimostra l'opera di Lazare Carnot, *Géométrie de Position*, Duprat, Paris,1803.

[6] H. Freudenthal, "Lie groups and the foundations of geometry", *Advances. of Mathematics*, **1** (1965) 148-156.

[7] N. Bourbaki, *Éléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris, 1960, p. 143 (*Elementi di Storia della Matematica,* Feltrinelli Milano, 1963).

[8] Le ho presentate la prima volta in "Minkowsky, Poincaré, Lobacevskij: la via geometrica alla relatività ristretta", in P. Tucci (ed.), *Atti XVIII Congr. Naz. Storia Fis. e Astr.*, Dip. Fis. Generale e Appl., Univ. Milano, Milano, 1998, 151-170, dove ho fatto vedere che con la geometria non euclidea si può passare con facilità alla relatività ristretta.

[*] Università degli Studi di Pisa, e-mail: drago@unina.it

La vita è sogno

di Nevio Nigro

La vita è sogno.
Ma sembra bella
anche la solitudine.
E il silenzio.

Non piango giovinezza.
Ma sempre
ovunque vado la ripenso.

da: Nevio Nigro, Incontri, Milano, Crocetti, 2008