Premessa

Vogliamo studiare in queste pagine una scala musicale “universale” , che possa cioè valere per tutti i tipi di melodie e tutti i tipi di strumento musicale. Questa scala è stata scoperta intorno al 1690 dal tedesco Werckmeister dopo molti tentativi compiuti attraverso i secoli, a partire dal primo fondamentale contributo di Pitagora intorno al 500 a. C. . Partiamo proprio dal lavoro di Pitagora e della sua Scuola, riepilogando i risultati anche da noi ottenuti nello studio del monocordo , con il criterio di scelta di rapporti razionali i più semplici possibile tra la lunghezza del monocordo e delle sue parti (selezionate nel nostro caso usando cavalletti mobili).

Diamo subito il risultato, detto **scala pentafonica** (o pentatonica); a questo scopo, chiamando L_0 la lunghezza del monocordo, con il criterio utilizzato da Pitagora si ottengono 5 lunghezze nell’intervallo $\left]\frac{L_0}{2}, L_0\right]$ (chiamato intervallo di **ottava**) , che sono, in ordine decrescente:

$$\left(L_0\,,\ \frac{8}{9}\,L_0,\ \frac{64}{81}\,L_0\,,\ \frac{2}{3}\,L_0\,,\ \frac{16}{27}\,L_0\quad\right).$$

E’ possibile ottenere poi le frequenze (cioè le **note** musicali) dei corrispondenti suoni emessi dal monocordo, utilizzando la relazione, già verificata sperimentalmente:

$f = \frac{c}{L}$ con c costante positiva dipendente dalle caratteristiche del monocordo.
E’ semplice infatti ricavare le 5 frequenze della scala pentafonica, in ordine crescente a partire dalla frequenza $f_0 = \frac{c}{L_0}$ della nota emessa dal monocordo libero:

$$\left(f_0\,,\ \frac{9}{8}\,f_0,\ \frac{81}{64}\,f_0\,,\ \frac{3}{2}\,f_0\,,\ \frac{27}{16}\,f_0\quad\right).$$

I valori di queste 5 note dipendono dalla scelta di f_0 , che a sua volta dipende dal tipo di corda e dalla sua tensione (con l’uso di una chiavetta per ogni corda negli strumenti moderni) . L’uso della scala pentafonica ha avuto grande importanza nei secoli, dagli antichi popoli orientali agli Indiani di America, fino alla musica sinfonica del XIX secolo e a quella contemporanea (Jazz, Blues) . Vogliamo, pur “salvando” la scala pentafonica, generalizzare in quel che segue lo studio delle note musicali, introducendo alcuni concetti matematici indispensabili per la costruzione della nostra scala musicale (e non solo per questo, come vi sarà chiaro lungo tutto il vostro percorso liceale).

1) La scala musicale temperata

Vogliamo provare a costruire una scala musicale che funzioni per tutti i possibili strumenti, cioè una successione crescente f_n di frequenze applicabile a tutti gli strumenti musicali. Per fare questo occorre osservare che il numero (finito!) di note possibili dipende dal tipo di strumento musicale usato (o dal tipo di voce, che è uno strumento musicale, usata) .

Consideriamo ad esempio i due strumenti musicali forse più noti, cioè la chitarra (acustica) a 6 corde e il pianoforte (a 88 tasti) : la prima, se si usa l’accordatura standard, ha la nota minima di valore 82,5 Hz e la nota massima di valore 880 Hz ; il secondo ha la nota minima di 27,5 Hz e la massima di 4186 Hz . La nota minima del pianoforte (primo tasto da sinistra) , detta La0 , può essere considerata quella di valore minimo raggiunto tra tutti gli strumenti musicali; se cerchiamo allora un valore di riferimento per la successione f_n , possiamo porre $f_0 = 27{,}5\ Hz$. Osserviamo che, per poter lavorare con una chitarra, non potremmo chiamare con il nome di f_0 la sua frequenza minima che è 82,5 Hz; in realtà questo non è un problema insormontabile, come vedremo, se la frequenza 82,5 Hz è uno dei termini della successione che stiamo costruendo.

Concentriamoci ora sull'ottava da f_0 a $2f_0$: c'è un requisito fondamentale da soddisfare, che come già sappiamo è stato la base delle scale musicali costruite nell'antichità (e anche di quelle moderne!), in particolare ad opera di Pitagora; all'interno dell'intervallo dell'ottava è indispensabile inserire la frequenza $\frac{3}{2}f_0$ (corrispondente nel monocordo alla lunghezza $\frac{2}{3}L$), (l'intervallo $\left[f_0 , \frac{3}{2}f_0\right]$ prende il nome di "**quinta giusta**"). L'ultimo requisito fondamentale di una scala musicale riguarda il cosiddetto "trasporto di una melodia": non vi sarà sfuggito che la scelta di f_0 come frequenza minima del nostro monocordo è di fatto arbitraria; posso modificare la tensione con la chiavetta o, se uso una chitarra, usare un'altra corda. Una melodia è una successione di note emesse a istanti di tempo diversi: posso suonare una melodia con la mia chitarra accordata nel modo accennato poco fa, con la prima corda a $f_0 = 82{,}5\ Hz$ (la potrebbe cantare bene un basso) o la stessa melodia con la sesta corda a $f_0 = 330\ Hz$ (la potrebbe cantare bene un soprano). Vedo che la melodia mi si riproduce operando con gli stessi tasti, cioè con gli stessi rapporti tra le lunghezze, e quindi tra le frequenze, ma cambiando la scelta delle corde. Per una scala di frequenza, cioè per una successione f_n con cui concepire e fabbricare uno strumento musicale, occorre richiedere che modificando f_0 non vari il rapporto tra le frequenze; vediamo come ci aiuta ancora in questo la matematica.

Consideriamo dunque l'intervallo di un'ottava $[f_0 , 2f_0]$; chiamiamo poi m l'indice (numero naturale) corrispondente alla frequenza $2f_0$, cioè $f_m = 2f_0$; con questa scelte l'intervallo viene suddiviso in m intervalli detti **gradi** (che nella scala che definiremo sono detti **semitoni**) . Avremo dunque una successione crescente di frequenze:

$$f_0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_{m-1} < f_m$$

Se però decido di cambiare f_0 e in particolare di iniziare da f_1 la mia ottava (posso realizzare questo con la mia chitarra, per confrontare le frequenze p.es. della terza e della quarta corda, modificando le frequenze della quarta corda con la chiavetta). Avrò per questa nuova ottava:

$$f_1 < f_2 < f_3 \dots < f_m < f_{m+1}$$

Per mantenere inalterati i rapporti tra le frequenze deve essere

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} , \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} , \dots, \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}$$

cioè $$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m} \qquad (4)$$

La (4) significa che f_n è una progressione geometrica di valore iniziale f_0 e di ragione $q = \sqrt[m]{2}$ (quest'ultimo risultato si ottiene subito imponendo che $q^m = 2$). Si può scrivere finalmente:

$$f_n = f_0\left(\sqrt[m]{2}\right)^n \qquad (5)$$

Noto incidentalmente un fatto significativo: si dimostra che $\sqrt[m]{2}$ è un numero irrazionale per $m > 1$ in modo analogo alla dimostrazione forse già vista nel caso $m = 2$. Come si vede, la necessità di muoversi nell'ambiente dei numeri reali si manifesta continuamente in matematica; in questo caso, la ragione della progressione che abbiamo costruito è risultata necessariamente un numero irrazionale.

Ci manca di trovare il valore di m, cioè il numero di gradi in un'ottava; per fare ciò dobbiamo ancora imporre che la nostra scala contenga la nota $\frac{3}{2}f_0$, cioè imponiamo che, detto k un numero naturale minore di m si abbia $f_k = \frac{3}{2}f_0$. Dalla (5) deve quindi valere, usando le potenze ad esponente razionale, la seguente uguaglianza:

$$2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2} \qquad (6)$$

Il problema (rilevante!) dell'uguaglianza (6) è che è **falsa**, cioè non esiste una coppia di interi positivi k e m per cui si verifica la (6) (questo si può dimostrare con la stessa tecnica con cui si dimostra l'irrazionalità di $\sqrt{2}$). Per trovare i valori di k e m , che sono alla base della scala che stiamo costruendo, ci dobbiamo quindi accontentare di un calcolo approssimato.

Si può trovare (omettiamo il calcolo, che fu effettuato la prima volta nel 1691 da A. Werckmeister) una soluzione razionale approssimata della (6), cioè un valore approssimato razionale del numero irrazionale x soluzione dell'equazione $2^x = \frac{3}{2}$; si ottiene $x \cong \frac{7}{12}$.

Abbiamo allora una possibile coppia di numeri che cercavamo:

$$k = 7 \qquad (7a)$$

$$m = 12 \qquad (7b)$$

L'approssimazione di Werckmeister è stata fin dall'inizio ritenuta del tutto accettabile per la costruzione di una scala musicale. Con le scelte (7a) e (7b) si hanno i seguenti risultati:

1) Ogni intervallo di un'ottava è diviso in **dodici intervalli** (detti semitoni);
2) la scala musicale che si ottiene è detta **scala temperata** ed è universalmente utilizzata per la composizione musicale e per la costruzione degli strumenti;
3) la scala delle note è una **progressione geometrica** di ragione $q = \sqrt[12]{2} \cong 1{,}0595$;

4) la nota corrispondente alla “quinta giusta” è la **settima**, con $f_7 = f_0 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \cong 1{,}499 f_0$.

Un ulteriore commento a queste caratteristiche della scala temperata: come sappiamo è una scala approssimata, infatti la nota prevista per i 3/2 di f_0 risulta valere $1{,}499 f_0$, ma la differenza con il valore teorico è ritenuta abbastanza piccola da poter essere considerata trascurabile. Questo piccolo prezzo da pagare è come già detto ampiamente ripagato con la possibilità di ritenere equivalenti tutte le note della nostra scala (frequenze in progressione geometrica) con grandi vantaggi teorici e pratici per i musicisti.

Ci mancano da chiarire ancora due questioni in sospeso, che ora con la scala temperata possiamo risolvere. La prima è quella di come possono “andare d’accordo” chitarra e pianoforte; la scala temperata inizia con $f_0 = 27.5\ Hz$ che è la prima nota del pianoforte, la prima nota della chitarra è 82.5 Hz , che vale $3f_0$. Si deve avere anche per la chitarra la scala temperata, cioè $f_n = f_0 \cdot q^n$ con $q = \sqrt[12]{2}$; ma con ottima approssimazione si ha $3 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cong q^{12+7} = q^{19}$ quindi $3f_0 = f_0 \cdot q^{19}$. Ora ponendo $n' = n - 19$ si può scrivere

$$f_n = f_0 \cdot q^n = f_0 \cdot q^{n'+19} \cong (3f_0) \cdot q^{n'}$$

Con un semplice cambiamento di variabile la scala temperata è salva perché $3f_0$ è potuto diventare un valore iniziale della successione, appartenendo alla scala temperata “universale” basata sul pianoforte per $n = 19$. La seconda questione, forse più importante e profonda della prima, è la seguente: come si concilia la scala temperata con la scala (pitagorica) pentafonica $\left(f_0\,,\ \frac{9}{8} f_0,\ \frac{81}{64} f_0\,,\ \frac{3}{2} f_0\,,\ \frac{27}{16} f_0 \right)$? Possiamo ricondurre queste cinque note alla dodici note della scala temperata usando un’uguaglianza approssimata, ma in realtà valida (alla Werckmeister) con approssimazione molto buona: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \cong \frac{9}{8}$. Infatti $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \cong 1{,}122$ e $\frac{9}{8} = 1{,}125$. Nella scala temperata $\frac{9}{8} f_0$ è quindi con buona approssimazione due semitoni (o anche un **tono** come si dice nella terminologia dei musicisti) più alta di f_0 e $\frac{81}{64} f_0$ due semitoni più alta di $\frac{9}{8} f_0$; $\frac{3}{2} f_0$ è 7 semitoni (ed è la quinta giusta senza approssimazioni!) più alta di f_0 e $\frac{27}{16} f_0$ altri due semitoni più alta di $\frac{3}{2} f_0$. Riassumendo: le note della scala pentafonica hanno nell’ordine i seguenti valori di n nella scala temperata (partendo da f_0 ma abbiamo imparato che possiamo cambiare valore iniziale senza danno): $(0\,,2\,,4\,,7\,,9)$.