1) Numeri reali

Premettiamo un teorema fondamentale, utilizzato di fatto fin dalla scuola primaria e dimostrato dal sommo matematico Carl Friederich Gauss nel 1798.

> **Teorema fondamentale dell'aritmetica**: "Ogni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori.

Utilizziamo il teorema fondamentale dell'aritmetica per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$; ricordiamo che il simbolo $\sqrt{2}$ indica il numero che corrisponde alla soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 = 2 \qquad (1)$$

Vogliamo dimostrare che non esiste un numero razionale x positivo, cioè del tipo $\frac{p}{q}$ con p e q numeri naturali, che soddisfi la (1) ; dimostriamo tale enunciato **per assurdo**, cioè mostriamo che, negandone la tesi, cioè supponendo vera l'uguaglianza $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ con $p\,,q \in N$, si arriva ad una contraddizione con enunciati (assiomi o teoremi) verificati in precedenza. Veniamo alla dimostrazione: partiamo dall'uguaglianza $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ supposta vera; essa equivale all'uguaglianza

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

Applichiamo a tale uguaglianza il teorema fondamentale dell'aritmetica: il primo membro p^2 è un numero naturale, che, scomposto in fattori primi, contiene il numero 2 un numero pari di volte (eventualmente zero) ; il secondo membro $2q^2$ è ancora un numero naturale, ma scomponendo q^2 in fattori primi si ha che ovviamente anch'esso contiene 2 un numero pari di volte (eventualmente zero) e che quindi stavolta $2q^2$ contiene il numero 2 un numero dispari di volte. L'uguaglianza (2) è quindi in contraddizione con il teorema fondamentale dell'aritmetica, perché avremmo un numero naturale ($p^2 = 2q^2$) con due diverse scomposizioni in fattori primi.

Abbiamo così dimostrato che $\sqrt{2}$, soluzione positiva della (1) , non è un numero razionale, cioè è per definizione un **numero irrazionale**. Sapete forse già che la matematica ha "bisogno" di uscire dall'insieme dei numeri razionali . Tale "bisogno" si è manifestato subito con l'applicazione del teorema di Pitagora al calcolo della diagonale D del quadrato di lato 1 , che soddisfa la (1) e quindi vale $D = \sqrt{2}$. Tentiamo allora il calcolo di $\sqrt{2}$: cerchiamo cioè il numero positivo x che soddisfa la (1) .

Usiamo numeri razionali per trovare approssimazioni per difetto e per eccesso di $\sqrt{2}$, cioè calcoliamo degli intervalli razionali (in particolare con estremi decimali non periodici) che contengano $\sqrt{2}$ all'interno di ciascun intervallo. Se abbiamo un intervallo $[a,b]$ (con $a\,,b \geq 1$) , la condizione $a < \sqrt{2} < b$ è equivalente alla condizione

$$a^2 < 2 < b^2 \qquad (3)$$

Partiamo dall'intervallo $[a_0 \, , b_0] = [1 \, , 2]$, che soddisfa alla condizione $a_0 < \sqrt{2} < b_0$ perché $1^2 < 2 < 2^2$; suddividiamo $[a_0 \, , b_0]$ in dieci intervalli uguali (lavorando così sempre con numeri decimali) e otteniamo, con l'uso della calcolatrice, $[a_1 \, , b_1] = [1.4 \, , 1.5]$ in quanto per gli estremi di tale intervallo vale ancora la (3) . L'ampiezza di $[a_0 \, , b_0]$ vale 1 , l'ampiezza di $[a_1 \, , b_1]$ vale $\frac{1}{10}$; inoltre $[a_1 \, , b_1] \subset [a_0 \, , b_0]$. Il procedimento può continuare, sempre dividendo l'intervallo ottenuto ($[a_1 \, , b_1]$) in dieci parti; ci fermeremmo solo se trovassimo un numero decimale, dei nove che di volta in volta calcoliamo, che soddisfacesse la (1) , ma sappiamo che è impossibile appunto per l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Si arriva quindi a definire, con questo metodo, una successione (!) di intervalli $[a_n \, , b_n]$ con le due proprietà seguenti:

$$[a_{n+1} \, , b_{n+1}] \subset [a_n \, , b_n] \qquad (4a)$$

$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad (4b)$$

Commentiamo tale risultato: per la (4a) gli intervalli $[a_n \, , b_n]$ sono "incapsulati" l'uno dentro il precedente come matrioske russe o scatole cinesi; le ampiezze d_n degli intervalli, cioè $d_n = b_n - a_n$, diventano per la (4b) "arbitrariamente piccole": 1 , $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

Ogni intervallo di questa successione di intervalli razionali contiene $\sqrt{2}$ al suo interno ma $\sqrt{2}$ non è un numero razionale; a_n è una successione crescente di approssimazioni per difetto di $\sqrt{2}$, cioè $a_n < a_{n+1}$ e $a_n < \sqrt{2}$ per ogni $n \in N$; b_n è una successione decrescente di approssimazioni per eccesso di $\sqrt{2}$, cioè $b_n > b_{n+1}$ e $b_n > \sqrt{2}$ per ogni $n \in N$.

La forma della (4b) nasce dalla scelta di suddividere ogni intervallo in dieci parti uguali; i matematici hanno generalizzato questa proprietà delle ampiezze di diventare "piccole quanto si vuole" attraverso il concetto di limite, che abbiamo già analizzato nel mio precedente contributo:

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0 \qquad (4c)$$

Ogni successione $[a_n \, , b_n]$ di intervalli di numeri razionali tale che valgano la (4a) e la (4c), detta **scatola cinese** di numeri razionali, definisce un numero reale. In realtà la corrispondenza tra scatole cinesi di numeri razionali e numeri reali non è biunivoca: si possono fare scelte diverse per definire lo stesso numero reale. Ad esempio, per cercare $\sqrt{2}$, si possono dividere gli intervalli in un numero di parti uguali diverso da 10…). Le (infinite…) scatole cinesi utilizzabili per costruire uno stesso numero reale attraverso la (4a) e la (4c) possono essere accorpate in un'unica classe (occorrerebbe definire meglio le cose ma non ci addentriamo nei dettagli) . Dato un numero reale, possiamo lavorare con esso scegliendo un qualsiasi rappresentante di questa classe e costruire un'algebra, cioè un insieme di operazioni (somma, prodotto,…) che funzionino indipendentemente dalla scelta effettuata. Ancora evitando di entrare nei dettagli, ci limitiamo per ora ad accettare il fatto che si possano definire le operazioni tra numeri reali, ognuno identificato come scatola cinese di numeri razionali, lavorando per ogni numero reale con una qualunque scatola cinese rappresentante della sua classe.

2) I numeri irrazionali e la calcolatrice

Un numero irrazionale è definito come un numero relativo la cui rappresentazione decimale è illimitata e non periodica (ricordiamo infatti a questo proposito che ad esempio la rappresentazione decimale di $\frac{1}{3}$, numero razionale, corrisponde a $0,\overline{3}$ che ha infinite cifre decimali ma è un numero periodico. L'insieme dei numeri reali si definisce poi come l'unione dell'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri irrazionali, eludendo però il problema della vera definizione di numero reale, cioè di cosa accomuna i due sottoinsiemi. Come avete visto, abbiamo cercato di fornire questa definizione (anche se non è l'unico modo possibile) costruendo i numeri reali tramite i numeri razionali.

Un ultimo cenno ai numeri irrazionali e alla loro algebra: supponiamo ad esempio di voler calcolare il numero $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. $\sqrt{2}$ è irrazionale, come già dimostrato; anche $\sqrt{3}$ lo è e la dimostrazione si fa allo stesso modo (provate per esercizio!). Se imposto la somma con una calcolatrice (uso una di quelle decisamente vecchiotte, le vostre sono sicuramente migliori…) , per $\sqrt{2}$ appare sul display il numero decimale $1{,}414213562$. E' un numero di 10 cifre ed è ovviamente razionale, essendo decimale; l'algoritmo su cui funziona la calcolatrice (più veloce di quello usato da noi) per calcolare $\sqrt{2}$ ha fornito a_9 , cioè in questo caso l'estremo sinistro del decimo intervallo della scatola cinese $[a_n\,, b_n]$ usata; naturalmente l'estremo destro varrà $b_9 = 1{,}414213563$. Per $\sqrt{3}$ il discorso è identico: volendo chiamare $[a'_n\,, b'_n]$ una sua scatola cinese, dato che la macchinetta fornisce sul display per $\sqrt{3}$ il numero $1{,}732050808$, avremo $a'_9 = 1{,}732050808$

e $b'_9 = 1{,}732050809$. Il calcolo di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ alla macchinetta fornirebbe naturalmente il numero decimale $a_9 + a'_9$; questo è compatibile con la definizione di somma di numeri reali fornita dalla teoria, che non abbiamo approfondito ma che possiamo immaginare: per sommare due scatole cinesi $[a_n\,, b_n]$ e $[a'_n\,, b'_n]$ si calcola $[a_n + a'_n\,, b_n + b'_n]$ che si dimostra essere anch'essa una scatola cinese; quest'ultima sarà per definizione associata appunto al numero reale $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.