1) La serie geometrica

Vogliamo applicare ciò che abbiamo imparato nei contributi precedenti ad un oggetto matematico molto bello e utile in numerose applicazioni: la **serie geometrica**. Consideriamo la progressione geometrica di ragione q e valore iniziale a_0 , cioè la successione $a_n = a_0 \cdot q^n$. Cerchiamo ora di calcolare la successione s_n definita come la somma (o come si dice anche la **sommatoria**) dei primi $n+1$ termini della successione a_n ; ci sarà utile la seguente identità, con il parametro reale $q \neq 1$ e valida per n numero naturale arbitrario:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (1)$$

La (1) si può dimostrare per ricorrenza o anche direttamente con semplici manipolazioni algebriche. Un'altra maniera per esprimere la (1) è con la notazione di sommatoria. Si scrive nel modo seguente:

$$\sum_0^n {}_i\, q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (1')$$

Descriviamo la struttura del primo membro: il simbolo Σ (che sta per somma, è la lettera s maiuscola dell’alfabeto greco) indica che si devono appunto sommare gli addendi q^i sostituendo di volta in volta al simbolo i (qui ad esponente) , detto **indice muto**, i numeri naturali da 0 a n . Il simbolo i potrebbe essere sostituito con un qualsiasi altro (spesso si usa j , k o altre lettere) da cui il nome di indice muto; la vera variabile del sistema è invece n , cioè il numero degli addendi (in questo caso aumentato di 1) . La (1’) non ha bisogno dei “puntini puntini” come la (1) e fornisce tutte le indicazioni necessarie per organizzare la struttura di una somma. E’ una notazione molto versatile: è chiaro ad esempio che $\sum_1^3 {}_i\, a_i = a_1 + a_2 + a_3$ .Possiamo ora calcolare $s_n = \sum_0^n {}_i\, a_0 \cdot q^i$; raccogliendo a_0 nella sommatoria si ha infine

$$s_n = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (2)$$

E’ abbastanza facile calcolare $lims_n$ nel caso che ci interesserà tra poco, che è il più interessante, cioè $0 < q < 1$: sapendo che in questo caso $limq^n = 0$ e anche

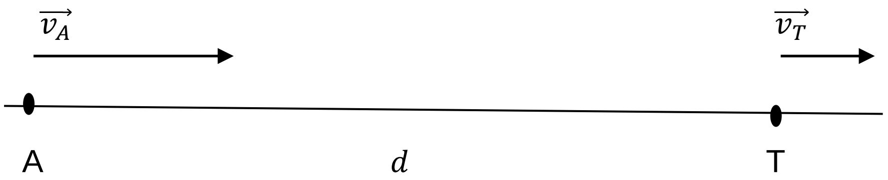
$limq^{n+1} = 0$ si ottiene infine

$$lims_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad (3)$$

Il termine generale della successione s_n è detto somma parziale della serie geometrica e $lims_n$ è detto semplicemente **somma della serie geometrica .** Applicheremo subito la (3) in quel che segue.

2) Achille e la tartaruga

Supponiamo di dover risolvere il seguente problemino di Cinematica: due punti materiali A e T si muovono lungo la stessa retta AT, entrambi di moto uniforme, con le velocità $\overrightarrow{v_A}$ e $\overrightarrow{v_T}$ aventi lo stesso verso ma tali che $v_A > v_T$. I due punti materiali siano all'istante $t = 0$ a una data distanza $\overline{AT} = d$ e con T "in vantaggio" su A (vedi figura sotto) ;



Il quesito è: a quale istante $\bar{t}$ A raggiunge T ? La risposta è abbastanza semplice: le due posizioni coincidono se $v_A \cdot \bar{t} = d + v_T \cdot \bar{t}$, cioè

$$\bar{t} = \frac{d}{v_A - v_T} \qquad (4)$$

Il grande filosofo Zenone di Elea, allievo di Parmenide, vissuto nel V secolo a.C. , affrontò una situazione del tutto simile a questa: supponiamo che Achille "piè veloce" sia il punto A (A sta per Achille…) , che si sta muovendo diciamo con $v_A = 10\, m/s$ (una velocità da record del mondo dei 100 metri…); supponiamo che il punto T sia una tartaruga (T sta per Tartaruga…) con $v_T = 1\, m/s$ (la facciamo andare veloce per una tartaruga per comodità nei numeri) ; sia infine la loro distanza iniziale $d = 1\, m$.

Zenone si poneva dubbi niente affatto banali, anzi molto profondi, sulla realtà del moto dei corpi materiali, cercando di dimostrare che il moto è in generale impossibile dal punto di vista filosofico e che la sua percezione è una nostra illusione. Affrontò infatti il nostro problemino (che abbiamo subito risolto in modo "spavaldo" con la (4) usando la Cinematica di Newton) in una versione tutta sua; descriviamola brevemente.

Nel tempo $t_0 = \frac{d}{v_A} = \frac{1}{10}\, s$ (d'ora in avanti mi permetto per semplicità di omettere l'unità di misura per i tempi, che sarà sempre s) si è spostato di 1 metro e raggiunge il punto in cui si trovava la Tartaruga; ma intanto la Tartaruga si è mossa (a $v_T = 1\, m/s$) e ha percorso uno spazio di $\frac{1}{10} m$. Per raggiungere la nuova posizione della Tartaruga, Achille dovrà impiegare un altro intervallo di tempo $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$; il tempo complessivo impiegato finora da Achille è $t_1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 0{,}11$. Ma Achille non ha ancora raggiunto la Tartaruga, perché nel tempo di $\frac{1}{100}$ essa ha percorso $\frac{1}{100} m$. Achille arriverà a questa nuova posizione, ma impiegherà un tempo di $\frac{1}{1000}$, e quindi un tempo complessivo $t_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = 0{,}111$ e così via…

Si capisce benissimo che, in questo modo (del tutto legittimo!) di impostare il moto di Achille per tentare di raggiungere la Tartaruga, si devono usare **infinite operazioni elementari** di somma di tempi. Zenone concludeva che, trattandosi di un processo all'infinito, cioè in questo caso di una somma di infiniti addendi, Achille non avrebbe mai raggiunto la Tartaruga, dal momento che per farlo avrebbe dovuto compiere un numero infinito di operazioni elementari. La teoria dei limiti delle successioni è capace (dopo circa 2300 anni!) di dare una risposta definitiva a Zenone: il tempo occorrente ad Achille per raggiungere la Tartaruga è il limite della somma parziale s_n della (3) , con $a_0 = 0.1\ s$ e $q = \frac{1}{10}$ e vale $0{,}1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$. Naturalmente (ma non troppo!) anche il tempo $\bar{t}$ da noi trovato con la (4), cioè applicando direttamente le leggi del moto, vale nel caso di Achille $\bar{t} = \frac{1}{10-1} = \frac{1}{9}$; non abbiamo avuto bisogno di "risommare tempi parziali" come Zenone, ma questa sua operazione concettuale ha dato un contributo fondamentale nell'evoluzione del pensiero umano.

Concludo con un'osservazione sui numeri periodici, a cui ho fatto cenno al paragrafo 5, e sul risultato del nostro calcolo $\bar{t} = \frac{1}{9}$; si è visto che le approssimazioni per difetto di $\frac{1}{9}$ nella procedura di calcolo di Zenone sono $t_0 = 0{,}1$, $t_1 = 0{,}11$ $t_2 = 0{,}111$ e così via…La somma parziale $t_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}$ è sempre un'approssimazione per difetto di $\frac{1}{9}$. Alla scuola secondaria di primo grado ci raccontavano come delle ricette misteriose le regole dei numeri decimali illimitati periodici: il numero $\frac{1}{9}$ per esempio è la frazione generatrice di $0{,}111111111\ldots = 0,\bar{1}$. Se calcolate $\frac{1}{9}$ con la macchinetta calcolatrice, questa vi rende ad esempio $0{,}11111111$ (8 cifre dopo la virgola per la mia che è un po' vecchiotta, per quelle più moderne anche 12 cifre) ; l'algoritmo della macchinetta vi calcola <u>sempre</u> un'approssimazione decimale non periodica, che poi vi portate dietro nel calcolo. Come ogni numero reale, il numero razionale $\frac{1}{9}$ si può descrivere con la scatola cinese di numeri decimali $[0{,}1; 0{,}2]$, $[0{,}11; 0{,}12]$, $[0{,}111; 0{,}112]$ e così via. Per calcolare la frazione generatrice di ogni numero decimale periodico, per es. $\frac{1}{9}$ per $0,\bar{1}$, ci vuole la (3) , applicata con un po' di acume nel caso più generale . Anche se ora non entriamo nei dettagli, potreste arrivare a dimostrare le "ricette" che si insegnano per ottenere la frazione generatrice di ogni numero decimale periodico; esse sono comunque sempre dimostrabili con l'uso della somma (3) di una serie geometrica.