

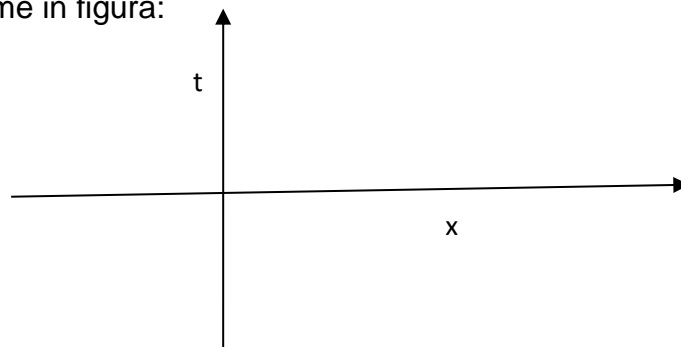
## 1 ) Eventi nello spazio-tempo

Vogliamo studiare l'evoluzione di semplici sistemi fisici applicando i principi della teoria della relatività. Lo faremo descrivendo sistemi che ci sono familiari fin dall'inizio del nostro studio della fisica, come il moto di un treno in prossimità di una stazione ferroviaria, di un aeroplano in un viaggio intercontinentale o di un'astronave in un viaggio interplanetario; ci interesserà introdurre anche sistemi la cui descrizione ha bisogno di elementi nuovi, come ad esempio l'emissione e ricezione di un impulso luminoso o il moto di una particella elementare instabile. Anche se ci aspettiamo differenze quantitative di comportamento tra i primi tre casi elencati e gli ultimi due, legate come minimo ai diversi ordini di grandezza delle velocità dei moti, vogliamo costruire una teoria che funzioni per ognuno dei cinque e che comunque si riduca alla meccanica newtoniana, che già conosciamo, per velocità del sistema piccole rispetto a quella della luce.

Diamo ora il concetto di **evento**, su esempi concreti del tipo di quelli dell'elenco che segue:

- a )Transito di un dato treno nella stazione di Pontedera;
- b )Atterraggio di un dato aereo di linea all'aeroporto di Fiumicino;
- c ) impatto di una navicella spaziale sulla superficie lunare;
- d ) emissione di un impulso luminoso da una data sorgente nel nostro laboratorio;
- e ) rivelazione di un muone generato nell'alta atmosfera per collisione di raggi cosmici da parte di un rivelatore del dipartimento di fisica dell'università di Pisa.

Per descrivere ognuna di queste situazioni concrete "elementari" , che chiameremo **evento** (attenzione: il significato del termine è qui completamente diverso da quello usato in teoria della probabilità!), occorreranno due dati: il punto dello spazio fisico e l'istante associati ad essa. In realtà abbiamo già una certa familiarità con il concetto di evento appena definito: nello studio del moto rettilineo di un punto materiale, abbiamo usato i grafici posizione-tempo, nei quali ogni punto  $P$  del grafico corrisponde per l'appunto ad un evento, cioè  $P(t; x)$  con  $t$  istante e  $x$  posizione del punto materiale in quell'istante. In relatività si preferisce per un moto rettilineo invertire le coordinate, per cui descriveremo un evento, o come si dice un punto dello spazio-tempo  $P(x; t)$  , usando un riferimento cartesiano  $x - t$  come in figura:



Inizieremo il nostro studio enunciando un postulato fondamentale che chiameremo per comodità “principio 1”: “La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento in moto relativo con vettore velocità costante”.

Indicheremo con  $c$  il modulo della velocità della luce nel vuoto, che vale con ottima approssimazione  $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  e che per il principio appena enunciato è una delle costanti fondamentali della fisica.

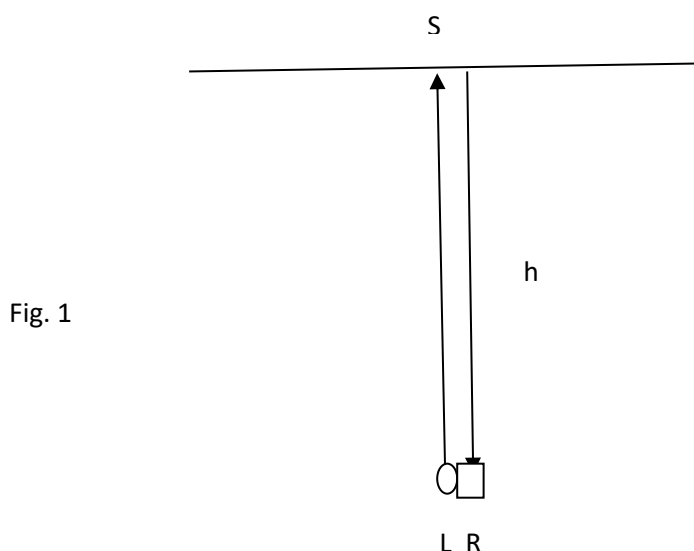
Questo postulato, enunciato da Einstein nel 1905, è in contraddizione palese con la nota legge di composizione delle velocità, per la quale, se  $\vec{V}$  è la velocità di un riferimento  $S'$  rispetto al riferimento  $S$  e  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  sono le rispettive velocità in  $S$  e  $S'$ , si ha

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (1)$$

Si avrebbe infatti, se nella (1)  $\vec{v}$  è la velocità della luce nel riferimento  $S$ ,  $\vec{v} = \vec{v}'$  per il principio 1 e  $\vec{v} = \vec{v} + \vec{V}$  che è falsa perché per ipotesi  $V \neq 0$ . Chiaramente dovremo decidere se cambiare la (1), cioè di fatto la meccanica newtoniana, o il principio 1: per ora continuiamo ad applicare quest'ultimo senza preoccuparci della (1), ne ripareremo al momento opportuno.

## 2 ) Orologio a luce e tempo proprio

Si consideri il sistema fisico schematicizzato in fig. 1, che chiameremo **orologio a luce**: una sorgente (puntiforme)  $L$  che emette un segnale luminoso in direzione ortogonale a uno specchio  $S$  a distanza  $h$  da  $L$ . Lo specchio riflette il segnale fino a un rivelatore  $R$  posto nelle immediate vicinanze di  $L$ , come in fig. 1, che può trasmettere istantaneamente a  $L$  il comando per l'emissione di un nuovo segnale e far funzionare così il nostro sistema per un tempo arbitrario.

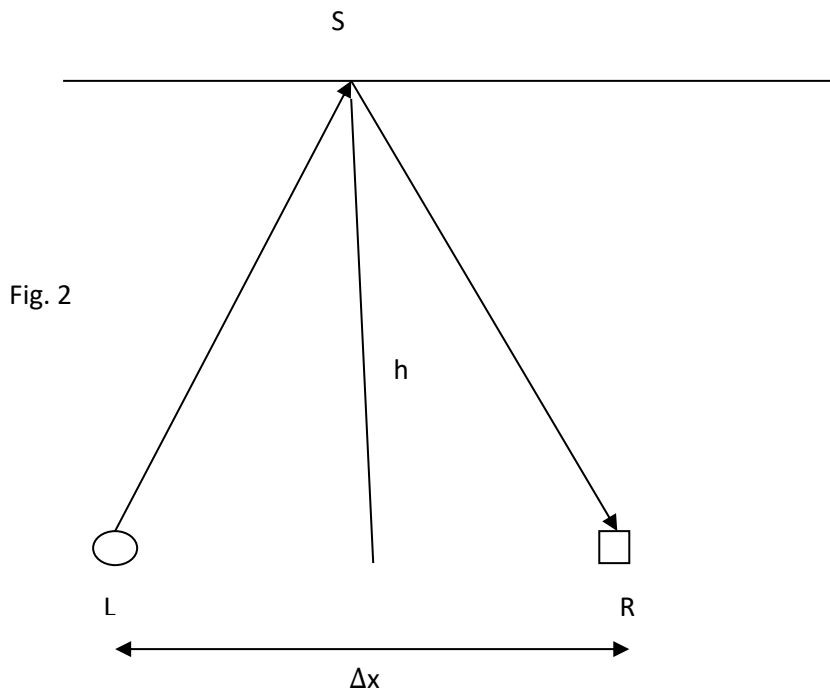


L'intervallo di tempo tra emissione e rivelazione di un segnale, che chiameremo  $\Delta\tau$ , vale:

$$\Delta\tau = \frac{2h}{c} \quad (2)$$

Osserviamo che  $\Delta\tau$  è l'intervallo di tempo tra i due eventi "emissione del segnale" e "ricezione del segnale" misurato nel sistema di riferimento (o più brevemente riferimento, termine preferito dai fisici) in cui l'orologio a luce è in quiete, o come si dice nel **sistema di quiete** dell'orologio a luce. Se il sistema dispone di un congegno che conta i comandi di emissione del segnale successivo, l'orologio a luce può effettivamente funzionare da orologio: l'intervallo di tempo segnato dall'orologio a partire dall'istante (e dall'evento) della prima emissione è  $n\Delta\tau$  se vengono contati  $n$  comandi;  $\Delta\tau$  funge così da "unità di tempo" del nostro "orologio digitale".

Supponiamo ora che l'orologio a luce si muova con velocità  $\vec{v}$  (diretta verso destra come in fig.2) rispetto al nostro laboratorio:



Il percorso LSR, che in fig. 1 era quello "andata e ritorno", è ora nel riferimento

del laboratorio formato da due segmenti, trasversali e non verticali, come in fig.2: la distanza complessiva percorsa dalla luce, per il principio 1, vale  $c\Delta t$ , dove  $\Delta t$  è il tempo complessivo emissione-ricezione. Ma applicando il teorema di Pitagora si ottiene banalmente usando la (2):

$$c\Delta t = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2\Delta\tau^2 + \Delta x^2} \quad (3)$$

da cui

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} \quad (3 \text{ bis})$$

Notiamo un fatto del tutto nuovo: l'intervallo di tempo  $\Delta\tau$  è quello tra i due eventi emissione del segnale-ricezione del segnale nel riferimento di quiete dell'orologio a luce; l'intervallo di tempo  $\Delta t$  nelle (3) è quello tra gli stessi due eventi in un riferimento diverso, cioè quello del laboratorio. Dalla (3 bis) i due tempi sono diversi:  $\Delta t$  è maggiore di  $\Delta\tau$ , semplicemente perché la velocità della luce è la stessa nei due riferimenti (principio 1) ma il tragitto percorso (confrontare le figg. 1 e 2) è diverso. Notiamo poi che se la velocità dell'orologio a luce è  $v' \neq v$  e quindi la distanza LR nella fig. 2 cambia di conseguenza, chiamando  $\Delta x'$  tale distanza e ripetendo i calcoli che hanno portato alle (3), necessariamente con un nuovo (!)  $\Delta t'$ , si ottiene ancora

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t'^2 - \frac{\Delta x'^2}{c^2}}$$

La conclusione è che  $\Delta\tau$ , intervallo di tempo tra i due eventi segnato dall'orologio a luce, è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento in moto relativo con velocità costante; si dice che è **invariante** per il cambiamento del sistema di riferimento (brevemente, che è un invariante) come lo è la velocità della luce nel vuoto. Possiamo misurare  $\Delta\tau$ , che è legato a parametri oggettivi come la distanza  $h$  e la velocità della luce, e leggerlo sul quadrante dell'orologio a luce come  $n \frac{2h}{c}$ ; l'informazione può essere comunicata a qualunque altro laboratorio (riferimento) in moto rispetto all'orologio. Chiameremo l'invariante  $\Delta\tau$ , il tempo segnato dall'orologio a luce, **tempo proprio**.

Un'analogia molto interessante che si può brevemente illustrare è quella tra la geometria dello spazio-tempo, descritta dalla (3 bis), e la geometria euclidea: dati due punti A e B del piano euclideo, se ne può misurare la distanza  $\Delta l = \overline{AB}$  (la cui esistenza e unicità è garantita da opportuni assiomi) con l'apposito strumento (metro). Si può anche istituire un arbitrario sistema di riferimento Oxy in un piano contenente A e B e calcolare, date le coordinate cartesiane di  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$ , la distanza  $\Delta l = \overline{AB}$  con la ben nota formula

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (4)$$

con  $\Delta x = x_B - x_A$  e  $\Delta y = y_B - y_A$ . Cambiando il sistema di coordinate, le coordinate cartesiane dei punti A e B cambiano ma  $\Delta l$  non varia; vale ancora

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}$$

La distanza tra due punti  $\Delta l$  (qui nel piano, cioè in due dimensioni) è un invariante come lo è il tempo proprio  $\Delta\tau$  nello spazio-tempo (anche qui in due dimensioni, cioè con una sola coordinata spaziale); la differenza essenziale sta nella presenza del segno meno nella (3bis) rispetto alla (4).

Un ultimo sforzo di generalizzazione della formula (3 bis) è fondamentale per la fisica che vogliamo incontrare nel prossimo futuro: se  $v$  è la velocità dell'orologio a luce (vedi ancora la fig. 2) , sarà  $\Delta x = v\Delta t$  da cui, sostituendo nella (3 bis) si ottiene

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

Possiamo usare la (5) per lo studio del moto di una particella che si muove con velocità  $v$  : il “suo” tempo proprio  $\Delta\tau$  è quello misurato da un orologio in quiete rispetto ad essa, o come si dice solidale con essa (diciamo il nostro orologio a luce, ma se non c'è, e ovviamente non c'è, ce lo immaginiamo...) . E se la velocità della particella non è costante? Si può ancora usare la (5) in un intervallo di tempo  $dt$  centrato nel generico istante  $t$  , abbastanza breve da poter considerare la velocità come costante (e uguale alla velocità istantanea  $v(t)$  e sommare (integrare...) tutti i contributi. Si ottiene per il tempo proprio tra due eventi A e B :

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (5 \text{ bis})$$

Non useremo esplicitamente la (5 bis), ma la dovremo citare comunque in una delle prossime applicazioni, che discuteremo nel mio prossimo intervento.

Giorgio Cellai

Docente di Matematica e Fisica. Liceo “G. Carducci” Volterra