Tre applicazioni del concetto di tempo proprio

a) La rivelazione dei muoni

Una particella instabile può decadere secondo la legge del decadimento esponenziale, con le modalità di seguito brevemente descritte. Se una certa regione di spazio contiene ad un dato istante N_0 particelle instabili, tutte praticamente immobili in un dato riferimento, detto $t = 0$ tale istante in quel riferimento (sistema di quiete delle particelle) , l'evoluzione temporale delle N_0 particelle ha la legge seguente:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (1)$$

con τ costante positiva detta **vita media** della particella.

Fatta questa premessa, discutiamo il comportamento di particelle elementari dette **muoni**, teorizzate verso la metà degli anni '30 e studiate sperimentalmente negli anni successivi. Il muone è una particella con proprietà del tutto simili a quelle dell'elettrone ma ha una massa circa 100 volte superiore e soprattutto, a differenza dell'elettrone, è una particella instabile con vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} s$. Sono prodotti muoni dall'interazione tra raggi cosmici (principalmente protoni di alta energia) e nuclei di molecole presenti nell'atmosfera terrestre; i muoni prodotti hanno velocità molto vicine a quella della luce.

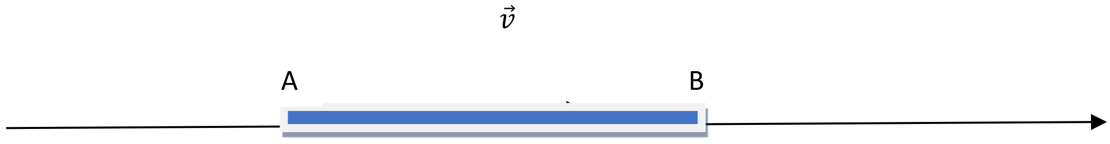
Discutiamo la possibilità di rivelare in un laboratorio terrestre muoni prodotti dai raggi cosmici, cioè generati nell'alta atmosfera a distanza diciamo $d \cong 10^4\ m$ dalla crosta terrestre. La loro velocità vale $v_\mu = 0.9994c$; in un riferimento solidale ad un laboratorio terrestre l'intervallo di tempo tra la generazione di un muone e la sua rivelazione (che possiamo chiamare tempo di volo) vale $\Delta t = \frac{d}{v_\mu} \cong 3 \cdot 10^{-5}\ s$. Usando questo ultimo risultato e la (1) si otterrebbe una percentuale di muoni giunti a terra del tutto trascurabile ($\frac{N}{N_0} \cong e^{-15}$) e sarebbe impossibile rivelare muoni. I muoni provenienti dall'alta atmosfera vengono invece rivelati agevolmente nei laboratori di tutto il pianeta; ciò si spiega altrettanto agevolmente con il fatto che τ è la vita media di un muone nel suo sistema di quiete. Se infatti Δt è un intervallo di tempo corrispondente al tempo di volo valutato nel sistema di riferimento del rivelatore alla superficie terrestre, il corrispondente tempo proprio del muone vale, secondo la (5) del mio intervento precedente, che citerò spesso chiamandola ancora (5) e riscrivo:

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (5)$$

In questo caso allora $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{{v_\mu}^2}{c^2}}$ e si ottiene qui $\Delta\tau \cong 1.2 \cdot 10^{-6}\ s$. La percentuale di "muoni sopravvissuti" è quindi in realtà $e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau}} \cong 0.52$ e ciò è in pieno accordo con quanto osservato, prima netta conferma da noi incontrata della teoria della relatività.

b) La “contrazione delle lunghezze”

Consideriamo un sistema di riferimento S e una barra di lunghezza L in quiete in S come in figura:



Dette A e B le estremità della barra, nel riferimento S si ha ovviamente $\overline{AB} = L$. Ho evidenziato nel disegno solo l’asse x per il riferimento S e ho disegnato la barra su quest’asse; vogliamo discutere se e come varia la lunghezza di una barra misurata in due riferimenti in moto relativo con vettore velocità avente la direzione della barra. Vediamo ora cosa succede osservando le cose da un riferimento S’ avente vettore velocità $\vec{v}$ disposto lungo l’asse x e verso scelto da sinistra verso destra come in figura; l’asse x’ è quindi sovrapponibile all’asse x, non ci sarà comunque qui bisogno di usare esplicitamente riferimenti cartesiani, non importa per esempio di definirne le origini . Per fissare le idee, supponiamo ora che la barra AB sia il marciapiede di una stazione ferroviaria e quindi il riferimento S sia in quiete rispetto alla stazione; il riferimento S’ si trova invece su un treno che sta viaggiando (e ovviamente attraversando la stazione) con velocità $\vec{v}$ (e quindi modulo v) come in figura.

Nel riferimento S si compie la misura della lunghezza della barra misurando l’intervallo di tempo Δt tra gli eventi “arrivo del treno in A” e “arrivo del treno in B”; si ottiene $\Delta t = \frac{L}{v}$ da cui $L = v\Delta t$. Osserviamo che Δt non è un tempo proprio, perché è misurato nel riferimento S usando due orologi differenti, uno posto all’inizio e uno alla fine del marciapiede.

Il riferimento S’ vede la stazione avvicinarsi con velocità ancora di modulo v e calcola la lunghezza della barra, cioè del marciapiede, che chiameremo L’, misurando ancora l’intervallo di tempo tra i due eventi “arrivo del treno in A” e “arrivo del treno in B”; qui il tempo misurato è un tempo proprio, perché misurato nella stessa posizione e dallo stesso orologio in S’.

Si ha dunque per la (5) $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ma $L' = v\Delta\tau$ perché lo sperimentatore sul treno vede passare la barra con velocità di modulo v , da cui si ottiene subito

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (2)$$

La (2) è la formula cercata ed esprime la cosiddetta **contrazione delle lunghezze;** è chiamata così per ovvi motivi, infatti $L' < L$.

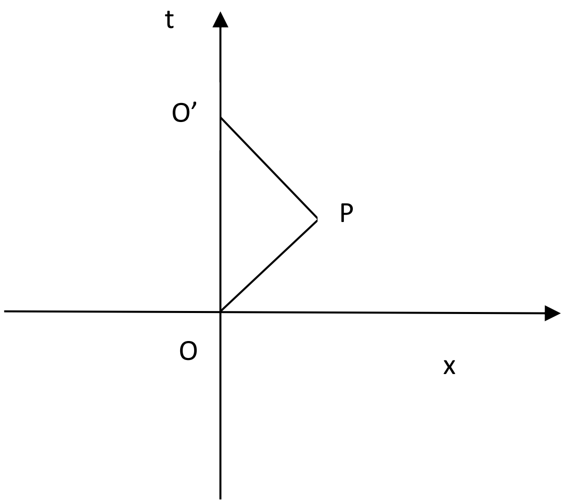
E’ del tutto chiaro che la (2) è una diretta conseguenza della (5) , cioè del concetto di tempo proprio, che è in realtà il fulcro della teoria. Approfitto infine per utilizzare la (2) nel descrivere in modo formalmente diverso (ma del tutto equivalente) l’esperimento dei muoni: il muone, in moto come già visto con velocità $v = 0.9994c$, deve percorrere la distanza tra il punto in cui è "nato" (nell'alta atmosfera) e quello in cui è rivelato (a terra), cioè diciamo $L = 10\ Km$. Il muone è l'equivalente dello sperimentatore in moto sul treno, con il proprio orologio "biologico" che smette (in media) di funzionare dopo un tempo $\tau = 2.2\ \mu s$ dalla sua generazione causa decadimento della particella. Per il muone però la distanza percorsa è quella "contratta" data dalla (2) , cioè $L^{'} = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; la velocità della Terra che gli va incontro ha modulo $v = 0.9994c$ e l'intervallo di tempo da lui misurato è quindi $\frac{L'}{v}$ che con i dati qui utilizzati vale ancora ovviamente $1.2 \cdot 10^{-6} s$.

c) Il "paradosso dei gemelli"

Supponiamo di avere un'astronave costruita per lunghi viaggi nello spazio, con un pilota V (V sta per "viaggiatore") e soprattutto un orologio (diciamo il nostro orologio a luce) funzionante all'interno dell'astronave. Supponiamo che V parta da una base spaziale posta in un punto O della superficie terrestre per compiere un viaggio con velocità $\vec{v}$ costante (in realtà ci sarà la solita fase di accelerazione, che trascureremo) percorrendo una distanza

d , per arrivare a un dato punto P del sistema solare a distanza dell'ordine di quella terra-sole (diciamo $d = 1 \cdot 10^{11}\ m$. Nella base spaziale il controllore di volo C (C sta per "controllore") , fratello gemello di V , dispone di un orologio identico a quello sull'astronave, che sincronizza con quello di V all'istante della partenza per il viaggio. Raggiunto il punto P l'astronave inverte immediatamente il moto (anche qui trascuriamo tutte le fasi di accelerazione) tornando alla base con velocità $-\vec{v}$. Descriviamo i viaggi nello spazio-tempo di C e V tracciandone i due grafici posizione-tempo (vedi fig. 1):

Fig. 1



Il segmento verticale OO' rappresenta il viaggio nello spazio-tempo di C , il segmento OP il viaggio di andata di V e il segmento PO' il viaggio di ritorno di V Sappiamo che sia l'orologio di C che quello di V segnano il tempo proprio del loro viaggio nello spazio-tempo da O a O' : per l'orologio di C il viaggio andata-ritorno è durato $\Delta\tau_C = \frac{2d}{v}$ e per l'orologio di

V è durato per la (5) $\Delta\tau_V = \frac{2d}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.(avremmo dovuto usare la (5 bis) del precedente intervento: $\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}$ ma stiamo trascurando tutte le accelerazioni).

Dalle due formule si vede chiaramente che $\Delta\tau_C > \Delta\tau_V$, cioè il tempo segnato dal gemello controllore di volo è maggiore di quello segnato dal gemello viaggiatore; la differenza tra i due intervalli di tempo e anche il loro ordine di grandezza dipendono dal modulo v della velocità rispetto a c . Un'astronave con equipaggio umano può raggiungere i $10^4 m/s$; $\Delta\tau_C$ può valere quindi usando questi numeri $\frac{2\cdot 10^{11}}{10^4} = 2\cdot 10^7 s \cong 231\ gg.$. Il fattore $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ qui è molto vicino a 1; calcolando $\Delta\tau_V$ si ottiene (provate con la calcolatrice tascabile) un valore minore di quello di $\Delta\tau_C$ di circa $10^{-2}s$; il gemello C è "invecchiato" rispetto al gemello V di un centesimo di secondo in un viaggio dell'ordine di un anno…! In realtà in un viaggio interplanetario come questo, correzioni per la (5 bis) a parte, intervengono effetti quantitativamente più importanti considerando anche l'applicazione della teoria ai campi gravitazionali (relatività generale).

Concludendo, se il viaggio fosse stato compiuto invece a velocità dell'ordine di c avrebbe potuto essere più breve (la luce per fare il tragitto terra-sole ci mette 8 minuti…) e la differenza relativa tra i due tempi molto maggiore, in quanto il fattore $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ può essere nettamente diverso da 1 ; il fatto è che possiamo mandare muoni a velocità dell'ordine di quella della luce, anzi ci pensano da soli, ma è per ora prematuro mandarci esseri umani.

Giorgio Cellai ordinario di matematica e fisica al liceo scientifico